



COPPE 50
UFRJ

EDIÇÕES HISTÓRICAS

Mecânica dos Fluidos

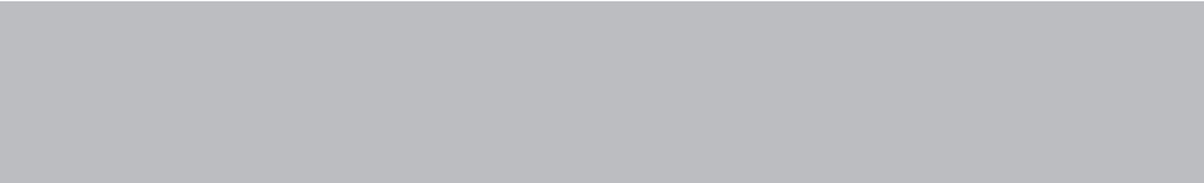
ALBERTO LUIZ COIMBRA



COPPE 50
UFRJ
EDIÇÕES HISTÓRICAS

Mecânica dos Fluidos

ALBERTO LUIZ COIMBRA





Diretoria

Luiz Pinguelli Rosa
Diretor

Edson Hirokazu Watanabe
Vice-diretor

Fernando Alves Rochinha
Diretor de Assuntos Acadêmicos

Romildo Dias Tolêdo Filho
Diretor de Tecnologia e Inovação

Guilherme Horta Travassos
Diretor de Planejamento e Administração

José Carlos Pinto
Diretor de Pesquisa e Desenvolvimento

Fundação Coppetec

Romildo Dias Tolêdo Filho
Diretor superintendente

José Carlos Pinto
Diretor executivo

Fernando Peregrino
Superintendente

Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

Centro de Tecnologia 2
Rua Moniz Aragão, 360, Bloco 1
Cidade Universitária – Ilha do Fundão
CEP 21941-972

Telefones: (55 21) 3622-3477/3478

Fax: (55 21) 3622-3463

E-mail: diretoria@coppe.ufrj.br

www.coppe.ufrj.br



Projeto Coppe 50 anos

Assessoria de Comunicação da Coppe /UFRJ

Centro de Tecnologia 2
Rua Moniz Aragão, 360, Bloco 1
Cidade Universitária – Ilha do Fundão
CEP 21941-972

Telefones: (55 21) 3622-3406/3408/3467/3506

E-mail: asscom@adc.coppe.ufrj.br

Coppe Notícias: www.planeta.coppe.ufrj.br

Twitter: [@coppeufrj](https://twitter.com/coppeufrj)

Facebook: www.facebook.com/coppe

YouTube: [/coppeufrj](https://www.youtube.com/coppeufrj)

Instagram: [@coppeufrj](https://www.instagram.com/coppeufrj)

Mecânica dos Fluidos

ALBERTO LUIZ COIMBRA

Rio de Janeiro, 2015

 **e-papers**

© Fundação Coppetec, 2015.

Todos os direitos reservados a Fundação Coppetec. É proibida a reprodução ou transmissão desta obra, ou parte dela, por qualquer meio, sem a prévia autorização dos editores.
Impresso no Brasil.

ISBN 978-85-7650-479-5

Editores

Juliana Braga Rodrigues Loureiro
Luiz Bevilacqua

Editores Assistentes

Daniel Onofre de Almeida Cruz
Fernando Pereira Duda

Editora Executiva

Dominique Ribeiro

Colaboradora técnica

Julia Mendonça Bastos

Projeto gráfico e capa

Ana Cláudia Ribeiro

Digitação

Marisa Silva Lima

Vetorização de figuras

Juliana Jesus

Revisão de texto

Nancy Soares

Produção Editorial

Thaís Garcez

E-papers Serviços Editoriais

<http://www.e-papers.com.br>

Rua Mariz e Barros, 72, sala 202

Praça da Bandeira – Rio de Janeiro

CEP 20.270-006

Rio de Janeiro – Brasil

CIP-Brasil. Catalogação na fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

C633m

Coimbra, Alberto Luiz

Mecânica dos fluidos / Alberto Luiz Coimbra. - 1. ed. - Rio de Janeiro : E-papers, 2015.

386 p. : il. ; 23 cm.

Apêndice

Inclui bibliografia

ISBN 978-85-7650-479-5

1. Mecânica dos fluidos. 2. Fluxo viscoso - Modelos matemáticos. 3. Método dos elementos finitos. I. Título.

15-21199

CDD: 532

CDU: 531.2

Sumário

Apresentação	xv
Prefácio	xvii
Nota dos Editores	xix
Capítulo 1	1
Capítulo 2	7
Capítulo 3	11
Capítulo 4	17
Capítulo 5	23
Capítulo 6	31
Capítulo 7	39
Capítulo 8	43
Capítulo 9	49
Capítulo 10	55
Capítulo 11	61
Capítulo 12	65
Capítulo 13	69
Capítulo 14	75
Capítulo 15	79
Capítulo 16	87

Capítulo 17	93
Capítulo 18	99
Capítulo 19	103
Capítulo 20	109
Capítulo 21	113
Capítulo 22	119
Capítulo 23	125
Capítulo 24	131
Capítulo 25	137
Capítulo 26	143
Capítulo 27	147
Capítulo 28	153
Capítulo 29	159
Capítulo 30	165
Capítulo 31	169
Capítulo 32	173
Capítulo 33	183
Capítulo 34	191
Capítulo 35	199
Capítulo 36	205
Capítulo 37	209
Capítulo 38	217
Capítulo 39	223
Capítulo 40	231
Capítulo 41	237

Capítulo 42245
Capítulo 43251
Capítulo 44255
Capítulo 45261
Capítulo 46271
Capítulo 47277
Capítulo 48283
Capítulo 49291
Capítulo 50297
Capítulo 51307
Capítulo 52315
Capítulo 53323
Capítulo 54329
Capítulo 55335
Apêndices345
Referências357
Sobre o autor359

Lista de Figuras

Figura 1.1	3
Figura 1.2	4
Figura 1.3	4
Figura 1.4	6
Figura 2.1	8
Figura 3.1	12
Figura 3.2	14
Figura 4.1	17
Figura 4.2	18
Figura 4.3	19
Figura 4.4	20
Figura 4.5	20
Figura 4.6	21
Figura 4.7	21
Figura 4.8	22
Figura 5.1	23
Figura 5.2	25
Figura 5.3	27
Figura 5.4	29
Figura 5.5	29
Figura 6.1	32
Figura 6.2	35
Figura 6.3	36
Figura 7.1	39
Figura 7.2	40
Figura 7.3	41
Figura 8.1	43
Figura 8.2	44
Figura 8.3	45
Figura 8.4	46

Figura 8.5	47
Figura 8.6	47
Figura 9.1	49
Figura 9.2	50
Figura 9.3	51
Figura 9.4	53
Figura 9.5	53
Figura 9.6	53
Figura 10.1	57
Figura 10.2	58
Figura 11.1	64
Figura 12.1	66
Figura 12.2	68
Figura 13.1	69
Figura 13.2	70
Figura 13.3	70
Figura 13.4	71
Figura 13.5	72
Figura 13.6	72
Figura 13.7	73
Figura 14.1	77
Figura 15.1	79
Figura 15.2	83
Figura 15.3	85
Figura 16.1	87
Figura 16.2	88
Figura 16.3	89
Figura 16.4	90
Figura 16.5	91
Figura 16.6	91
Figura 17.1	93
Figura 17.2	94
Figura 17.3	96
Figura 17.4	97
Figura 18.1	99
Figura 18.2	100

Figura 18.3	101
Figura 19.1	104
Figura 21.1	114
Figura 22.1	120
Figura 23.1	125
Figura 23.2	126
Figura 23.3	127
Figura 23.4	129
Figura 24.1	131
Figura 24.2	133
Figura 24.3	134
Figura 24.4	135
Figura 24.5	136
Figura 25.1	137
Figura 25.2	138
Figura 25.3	139
Figura 25.4	140
Figura 26.1	143
Figura 26.2	145
Figura 26.3	145
Figura 27.1	148
Figura 27.2	151
Figura 27.3	151
Figura 28.1	154
Figura 29.1	159
Figura 32.1	174
Figura 32.2	176
Figura 32.3	178
Figura 32.4	180
Figura 32.5	181
Figura 33.1	184
Figura 33.2	186
Figura 33.3	188
Figura 34.1	191

Figura 34.2 193

Figura 34.3 196

Figura 34.4 197

Figura 34.5 197

Figura 35.1 200

Figura 35.2 202

Figura 37.1 209

Figura 37.2 210

Figura 37.3 211

Figura 37.4 212

Figura 37.5 213

Figura 38.1 219

Figura 39.1 224

Figura 39.2 228

Figura 39.3 229

Figura 40.1 233

Figura 41.1 238

Figura 41.2 241

Figura 41.3 242

Figura 41.4 243

Figura 42.1 247

Figura 44.1 255

Figura 44.2 257

Figura 44.3 257

Figura 44.4 258

Figura 44.5 259

Figura 45.1 262

Figura 45.2 264

Figura 45.3 265

Figura 45.4 267

Figura 45.5 267

Figura 45.6 268

Figura 45.7 269

Figura 46.1 271

Figura 46.2 272

Figura 46.3 273

Figura 47.1	278
Figura 48.1	283
Figura 48.2	284
Figura 48.3	285
Figura 49.1	292
Figura 50.1	298
Figura 50.2	299
Figura 50.3	299
Figura 50.4	300
Figura 50.5	300
Figura 50.6	301
Figura 50.7	301
Figura 50.8	302
Figura 50.9	303
Figura 50.10	303
Figura 50.11	303
Figura 50.12	303
Figura 50.13	303
Figura 50.14	304
Figura 50.15	305
Figura 50.16	305
Figura 51.1	307
Figura 51.2	308
Figura 51.3	309
Figura 51.4	309
Figura 51.5	311
Figura 51.6	311
Figura 51.7	311
Figura 51.8	312
Figura 51.9	312
Figura 52.1	316
Figura 52.2	316
Figura 52.3	316
Figura 52.4	316
Figura 52.5	316
Figura 52.6	318
Figura 52.7	320
Figura 52.8	320
Figura 53.1	324

Figura 53.2 325

Figura 54.1 329

Figura 54.2 331

Figura 55.1 336

Figura 55.2 336

Figura 55.3 337

Figura 55.4 337

Figura 55.5 337

Figura 55.6 338

Figura 55.7 338

Figura 55.8 340

Figura 55.9 341

Figura 55.10 341

Figura 55.11 343

Figura A.1 345

Apresentação

A Coppe orgulha-se de trazer a público a obra *Mecânica dos Fluidos*, de autoria do seu fundador, professor Alberto Luiz Coimbra. A publicação, que integra as iniciativas em comemoração aos 50 anos da instituição, resgata uma obra singular, com exemplar disponível sob a guarda da Biblioteca de Obras Raras do Centro de Tecnologia da UFRJ, na Cidade Universitária.

Este livro atual e de grande valor didático, em especial para alunos de Engenharia, inaugura o selo Coppe Edições Históricas. Será disponibilizado ao público em formato impresso e digital, facilitando o acesso aos leitores em língua portuguesa.

Como poderão constatar nas páginas seguintes, Coimbra foi um professor que elaborava suas aulas com rigor e esmero, desenvolvendo equações em detalhes para torná-las compreensíveis aos alunos.

A Coppe espera com esta edição levar seus leitores a cultivar o gosto pela Matemática Aplicada, seguindo o exemplo do autor em suas memoráveis aulas.

LUIZ PINGUELLI ROSA
Diretor da Coppe/UFRJ

Estas notas são em parte baseadas nas aulas que ministramos desde 1953 na disciplina Mecânica dos Fluidos do 4° ano do curso de Engenharia Industrial Química, Mecânica e Metalurgia da Escola Politécnica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Outra parte mais avançada da matéria constou de cursos de Extensão Universitária que ministramos em 1959 e 1960 na Escola Nacional de Química da Universidade do Brasil.

Tratamos neste volume, principalmente do escoamento incompressível ideal e viscoso. Procuramos mostrar a importância dos princípios e conceitos básicos da Mecânica e da expressão matemática na formulação e solução dos problemas dos fluidos em escoamento. Acreditamos que as disciplinas dos terceiro, quarto e quinto anos dos cursos de Engenharia devem sempre mostrar a estreita dependência do particular (aplicações) com o geral (fundamentos físico-matemáticos) ensinados nos dois primeiros anos. Só assim o estudante dará mais importância às ciências, principalmente à Matemática.

Um auxílio do Conselho Nacional de Pesquisas permitiu a elaboração do presente trabalho. Temos que agradecer também aos engenheiros químicos e estudantes pós-graduados Marcello Brasileiro Madeira, Carlos Augusto Perlingeiro e Edgard Souza Aguiar Vieira que leram grande parte do manuscrito, apresentaram sugestões para melhorar a exposição e resolveram cerca de 50 problemas de aplicação. O estudante de Engenharia Química da Escola Nacional de Química, Roberto Bittencourt Teixeira trabalhou diligentemente na datilografia e desenhos.

O plano do segundo volume inclui o estudo de bombas e do escoamento compressível e os canais abertos.

Rio de Janeiro, novembro de 1962

ALBERTO LUIZ COIMBRA

Nota dos Editores

O lançamento desta edição histórica tem como propósito primordial resgatar parte da série de livros que o professor Alberto Luiz Galvão Coimbra publicou em sua trajetória profissional. O primeiro deles – este volume – é o mais raro e o menos conhecido. Não obstante, a obra reflete claramente a personalidade do autor: clareza e objetividade.

Agradecemos à Maria Cristina de Souza Barreto, responsável pela Biblioteca de Obras Raras do Centro de Tecnologia da UFRJ, pela concessão do único exemplar existente para este trabalho de reedição do primeiro livro escrito pelo professor Coimbra.

Este volume foi editado de modo a preservar ao máximo a forma e o conteúdo originais. As pequenas alterações nesta obra histórica foram feitas com o intuito de trazer fluidez à leitura. Na versão original, por exemplo, o tempo era denotado por θ . Outros termos típicos à época, como escoamento variado, configuração do escoamento e vetor radar também foram atualizados.

Boa leitura a todos!

JULIANA BRAGA RODRIGUES LOUREIRO
Professora da Coppe/UFRJ

LUIZ BEVILACQUA
Professor da Coppe/UFRJ

Propriedades dos fluidos

Massa específica ou densidade absoluta

A massa específica de um fluido é definida por:

$$\rho = \lim_{\delta_v \rightarrow \delta_v^*} \frac{\delta_m}{\delta_v}, \quad (1.1)$$

onde δ_v representa um pequeno volume de fluido com massa δ_m e δ_v^* denota o limite inferior de volume a partir do qual a variação de moléculas no seu interior passa a ser considerada relevante.

A massa específica é uma função ponto e o fluido é considerado *contínuo*, apesar de ser constituído de moléculas. O ponto ao interior do fluido contínuo é um volume que, apesar de pequeno, ainda é suficientemente grande em comparação com as distâncias entre as moléculas. O tratamento contínuo das propriedades dos fluidos sofre restrições quando este fluido é um gás, sujeito a uma pressão tão baixa que o percurso livre das moléculas é da ordem das dimensões físicas que entram no problema. Considerando que a massa específica é uma função ponto que pode variar no espaço e no tempo, podemos dizer, em representação cartesiana, que

$$\rho = f(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

ou em representação vetorial,

$$\rho = f(\vec{r}, t), \quad (1.3)$$

onde \vec{r} é o vetor posição.

A massa específica é uma maneira de se exprimir a densidade de um fluido; outras expressões da densidade são o peso específico e a densidade relativa. Essas quantidades serão introduzidas a seguir.

Peso específico

O peso específico é o peso por unidade de volume do fluido:

$$\gamma = \rho g, \quad (1.4)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Densidade relativa

A densidade relativa é a massa específica de um fluido a uma dada temperatura, dividida pela massa específica de um fluido de referência a uma certa temperatura de referência. Deste modo, a densidade relativa de um fluido é dada por:

$$d = \frac{\rho}{\rho_{fp}}, \quad (1.5)$$

onde ρ_{fp} é a massa específica do fluido padrão.

Para líquidos, a referência usual é a água a 4°C ou 20°C, enquanto que para gases a referência pode ser o ar padrão, de massa específica 1,2 kg/m³ (0,075lb/ft³).

A Tabela 1.1 mostra unidades típicas de massa e peso específico nos sistemas absolutos *MLT* e gravitacional *FLT*, tanto inglês quanto métrico.

	<i>MLT</i>		<i>FLT</i>	
	Métrico	Inglês	Métrico	Inglês
ρ	kg/m ³	lb/ft ³	utm/m ³	slug/ft ³
γ	newton/m ³	lbf/ft ³	kgf/m ³	lbf/ft ³

Tabela 1.1

Forças que atuam nos fluidos

As forças externas que atuam em um dado elemento fluido podem ser convenientemente divididas em

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{forças de superfície} \\ \text{forças de volume} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{forças normais} \\ \text{forças tangenciais} \end{array} \right.$$

Forças de superfície

As forças de superfície são forças externas ao volume fluido considerado, originadas por ação do fluido que envolve esse volume: esta ação pode, em geral, ser desdobrada em um componente normal à superfície e em outro tangencial a ela.

Forças normais

Isolemos um volume de controle ou corpo livre no interior de um fluido em repouso (Fig. 1.1). As moléculas situadas no interior deste elemento e em contato com a sua superfície de contorno chocam-se com as moléculas vizinhas exteriores, sendo a

frequência dos choques proporcional à área da superfície. Os choques interiores produzem efeitos iguais e contrários e não deixam saldo de força no elemento. As forças normais são estas forças externas que atuam perpendicularmente à superfície de um contorno, equilibrando as forças internas. O contorno do corpo livre pode estar em contato com uma parede sólida ou com uma interface fluido-fluido.

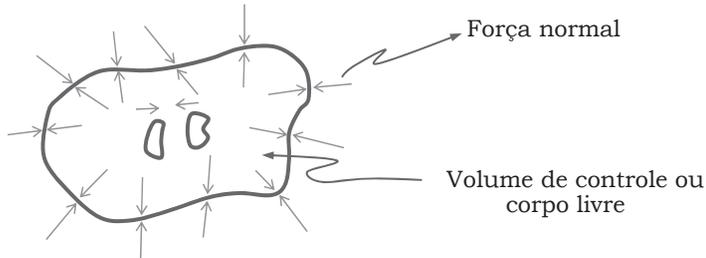


Figura 1.1

Forças tangenciais

No escoamento de fluido viscoso, a superfície de um volume de controle está sujeita a uma força inclinada, que pode ser desdobrada em uma força normal e uma outra tangencial à superfície. A componente tangencial da força de superfície é também chamada de força de cisalhamento ou de força viscosa.

Pressão

As forças de superfície, tanto normais como tangenciais, são diretamente proporcionais à área da superfície do corpo livre; portanto, é conveniente definir um termo igual à força da superfície por unidade de área, a qual recebe o nome de intensidade de pressão ou simplesmente pressão.

Forças de volume

As forças de volume, também chamadas de forças de massa ou de campo, são forças que, por ação à distância, atuam no interior de um volume de controle. O exemplo mais comum é o da força de gravidade, que atua em todas as moléculas do corpo livre sendo, portanto, proporcional ao volume ou à massa do corpo. Essas forças podem, então, ser expressas por unidade de volume ou de massa.

Expressão analítica da força de cisalhamento

Isolemos dois planos paralelos de área superficial A , separados de δ_y em um fluido de viscosidade μ que escoam unidirecionalmente em contato com uma parede plana (Fig. 1.2). A força tangencial F_V que deve ser aplicada no plano superior, mais rápido, para que ele se mova com um excesso de velocidade δv_x em relação ao plano inferior, é

a força de cisalhamento ou força viscosa, cuja expressão em função do gradiente de velocidade é:

$$\tau_{yx} = \frac{F_V}{A} = \mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (1.6)$$

Do tensor que representa a força de superfície (normal e tangencial) por unidade de área, τ_{yx} é o componente que está relacionado com o gradiente na direção y da componente v_x do vetor velocidade.

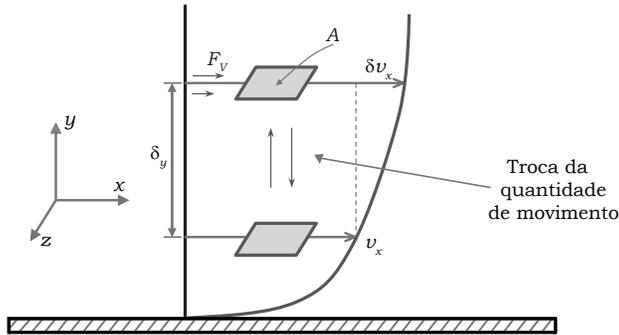


Figura 1.2

Consideremos agora os elementos de um fluido em movimento formado pelos traços no plano xy dos dois planos de área A e de duas seções perpendiculares a esses planos (Fig. 1.3). Esse elemento, inicialmente retangular, depois do pequeno intervalo de tempo δt sofre uma distorção angular $\delta \alpha$.

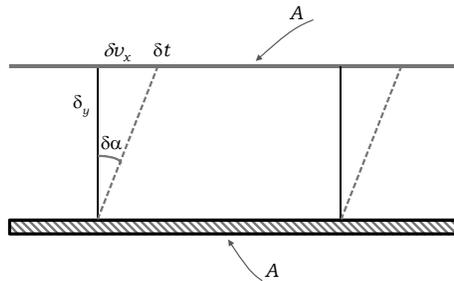


Figura 1.3

O ângulo de distorção é expresso por:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\delta v_x \delta t}{\delta y}. \quad (1.7)$$

Tomando infinitésimos, temos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad (1.8)$$

portanto, a equação (1.6) pode ser expressa do seguinte modo:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\alpha}{dt}, \quad (1.9)$$

onde $d\alpha/dt$ é taxa de distorção angular.

No escoamento de *fluidos newtonianos*, existe uma relação linear entre τ_{yx} e $d\alpha/dt$ ou dv_x/dy porque a viscosidade μ é uma propriedade de fluido, independente da tensão de cisalhamento aplicada ou da resultante taxa de deformação.

Transferência de quantidade de movimento viscoso

Entre as camadas do fluido em escoamento (Fig. 1.2) há uma troca transversal de quantidade de movimento molecular ou viscoso, de tal sorte que as moléculas da camada mais rápida chocam-se com as da camada mais lenta, acelerando-as, enquanto que retardam-se recebendo os choques das moléculas mais lentas. Há a necessidade da aplicação da força viscosa para que seja mantido o gradiente de velocidade e, portanto, o escoamento do fluido viscoso.

A tensão viscosa τ_{yx} pode ser interpretada como o fluxo (taxa de transferência por unidade de área) da componente x da quantidade de movimento molecular ou viscosa na direção das camadas mais rápidas para as mais lentas, i.e., na direção y . Há então o fluxo da quantidade de movimento na direção do gradiente negativo da velocidade e este gradiente pode ser considerado como “força motriz” do transporte da quantidade de movimento, tal como o gradiente de temperatura na transferência de calor.

Quanto às unidades vemos que, no sistema absoluto,

$$[\tau_{yx}] = \left[\frac{kg \frac{m}{s}}{s m^2} \right],$$

i.e., as unidades de tensão são as mesmas do fluxo da quantidade de movimento.

Período de regime transiente

Admitamos que o fluido viscoso está contido entre duas placas de grandes dimensões, separadas por uma distância pequena (Fig. 1.4). Inicialmente o sistema está em repouso e começamos a marcar o tempo ($t = 0$) quando a placa inferior é posta em movimento na direção x , com sua velocidade constante v_x . O regime permanente só é atingido depois de certo tempo quando, então, a força constante necessária para manter o movimento da placa inferior é dado pela equação (1.6) que, no caso de gradiente linear de velocidade, é expresso por

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (1.10)$$

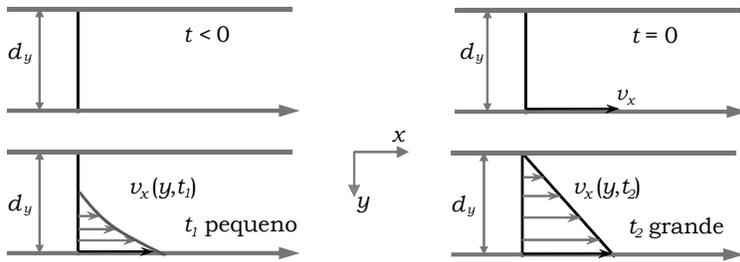


Figura 1.4

Referências

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 1, 1960.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 1, 1934.

Viscosidade

A viscosidade é uma propriedade dos fluidos newtonianos que exprime a sua resistência às forças de cisalhamento. Um fluido muito viscoso oferece maior resistência às forças viscosas e escoar com maior dificuldade do que um fluido pouco viscoso. Podemos considerar que a resistência oferecida por um fluido à ação de uma força tangencial depende de dois fatores: de sua coesão e da taxa de transferência de quantidade de movimento molecular. As forças de coesão são mais fortes nos líquidos do que nos gases e, como essas forças diminuem com o aumento da temperatura, a viscosidade de líquidos acompanha a variação. Nos gases, por outro lado, as forças de atração são menores, predominando a resistência ao cisalhamento devido à transferência de quantidade de movimento molecular, que aumenta com o aumento de temperatura. Deste modo, para os gases há um aumento da viscosidade com o aumento da temperatura.

A viscosidade μ , também chamada de coeficiente de viscosidade, viscosidade dinâmica ou absoluta, tem dimensões como $FL^{-2}T$ ou $ML^{-1}T^{-1}$. São muito usadas como unidades de viscosidade o poise ($= 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$]) e o centipoise.

Viscosidade cinemática

A viscosidade cinemática é determinada pela medida do tempo de escoamento de um certo volume de líquido através de um orifício padronizado nos aparelhos de Saybolt (Universal e Furel) e Engler. É definida por $\nu = \mu/\rho$ e envolve as dimensões de comprimento e tempo, tal como na cinemática. Unidades usuais de viscosidade cinemática são o stokes ($= 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$) ou o centistokes.

Fluidos não newtonianos

Os gases e a maioria dos líquidos pouco viscosos são fluidos newtonianos, para os quais a representação cartesiana de τ_{yx} com dv_x/dy fornece uma reta que passa pela origem (Fig. 2.1).

A *Reologia* é a ciência que estuda a deformação e o escoamento de substâncias que podem se situar entre os sólidos, que seguem a teoria da elasticidade de Hooke, e os fluidos newtonianos, que se deformam continuamente quando sujeitos a tensões de cisalhamento, por menores que elas sejam. Entre os dois extremos, sólidos e líquidos, temos toda a sorte de substâncias pastosas para os quais, em geral

$$\tau_{yx} = \eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (2.1)$$

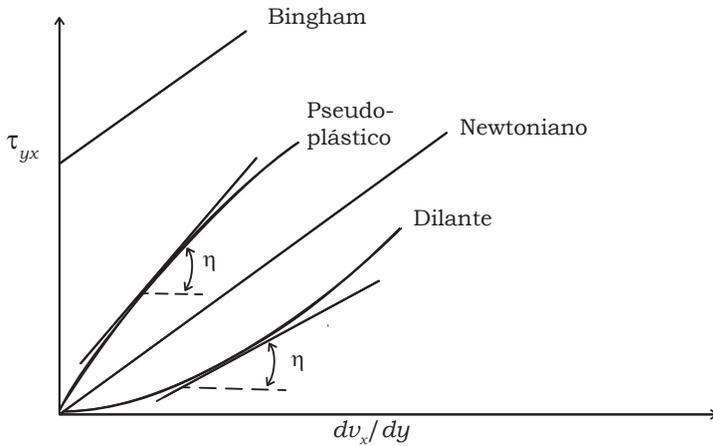


Figura 2.1

onde η é um coeficiente, função de τ_{yx} ou de dv_x/dy . Quando η diminui com o aumento de dv_x/dy , o material é chamado *pseudoplástico* e, no caso contrário, de *dilatante* (Fig. 2.1). Um *fluido Bingham*, por exemplo, resiste ao escoamento até que a tensão atinja um certo valor, i.e.,

$$\tau_{yx} = \mu_0 \frac{dv_x}{dy} + \tau_0, \text{ se } |\tau_{yx}| > \tau_0, \quad (2.2)$$

$$dv_x/dy = 0, \text{ se } |\tau_{yx}| < \tau_0, \quad (2.3)$$

onde τ_0 é a *tensão de escoamento*.

Gás perfeito

Um gás perfeito obedece a equação

$$PV = (m/M)RT. \quad (2.4)$$

Portanto, tem-se que

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}, \quad (2.5)$$

onde R é a constante universal dos gases perfeitos, M é o peso molecular do gás, P a pressão absoluta, T a temperatura absoluta ($^{\circ}R = ^{\circ}F + 460$ ou $K = ^{\circ}C + 273$), V o volume e m a massa do gás. A $0^{\circ}C$ ($32^{\circ}F$, $273K$ ou $492^{\circ}R$) e 1 atm de pressão, o volume de um mol de gás perfeito calculado pela equação (2.4) é de $22,4$ l/grama-mol ou 359 ft³/lb ml.

Outra equação fundamental válida para os processos reversíveis de gases perfeitos é (*):

$$PV^n = C^{te}. \quad (2.6)$$

Quando o processo é isotérmico, segundo a equação (2.4), $n = 1$ e

$$PV = C^{te}. \quad (2.7)$$

Quando o processo é adiabático, $n = \gamma'$ e

$$PV^{\gamma'} = C^{te}. \quad (2.8)$$

O expoente representa a razão entre o calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante, i.e.,

$$\gamma' = C_p / C_v. \quad (2.9)$$

Entre os dois calores específicos existe a relação

$$C_p - C_v = R / M. \quad (2.10)$$

Portanto, de acordo com as equações (2.9) e (2.10):

$$C_p = \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} \frac{R}{M}, \quad (2.11)$$

$$C_v = \frac{1}{\gamma' - 1} \frac{R}{M}. \quad (2.12)$$

Admitindo γ' constante, i.e., forçando tanto C_p como C_v a terem valores constantes, temos as seguintes relações

$$T_2 / T_1 = (V_1 / V_2)^{\gamma' - 1}, \quad (2.13)$$

$$T_2 / T_1 = (P_2 / P_1)^{\frac{\gamma' - 1}{\gamma'}}, \quad (2.14)$$

$$P_2 / P_1 = (V_1 / V_2)^{\gamma'}. \quad (2.15)$$

Compressibilidade

Definimos o módulo de elasticidade E de um fluido, pelas expressões

$$\delta P = -E(\delta V / V_0) = E(\delta \rho / \rho_0), \quad (2.16)$$

onde $\delta V / V_0$ e $\delta \rho / \rho_0$ são variações relativas de volume e de massa específica provocadas pela variação δP de pressão.

Para a água, $E = 20.000 \text{ kgf/cm}^2$, i.e., a variação relativa é de 0,005%. Para gases perfeitos, a compressão é isotérmica, de acordo com a equação (2.7)

$$E = -V_0 \frac{\delta P}{\delta V} = P_0, \quad (2.17)$$

onde o índice zero refere-se às condições de referência de temperatura e pressão (usualmente 0°C e 1 atm). Se a compressão é isentrópica, de acordo com a equação (2.8)

$$E = \gamma' P. \quad (2.18)$$

Para o ar a 0°C e 1 atm, de acordo com a equação (2.17), $E = 1$ atm. Segue-se que o ar é cerca de 20.000 vezes mais compressível do que a água.

Referências

STREETER, V.L. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 1, 1958.

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 1, 1960.

Fluido ideal e fluido real

O fluido ideal é um modelo matemático que representa um contínuo de viscosidade nula, i.e., o fluido ideal não oferece resistências às forças tangenciais. Na superfície de um corpo livre de um fluido ideal atuam somente forças normais, portanto, a pressão é a força normal por unidade de área. O fluido ideal escorrega sem atrito em contato com superfícies sólidas, com interfaces ou com superfícies de controle do próprio fluido. O *escoamento ideal* é caracterizado pela ausência de tensões tangenciais e pelo livre escorregamento do fluido.

O fluido real, pelo contrário, é viscoso e oferece alguma resistência às forças tangenciais e, portanto, não pode escorregar sem resistência ao longo de uma parede sólida. No contorno do fluido em contato com uma parede sólida, a velocidade tangencial à parede é nula.

Fluido homogêneo e incompressível

Diz-se que um fluido é homogêneo quando sua massa específica ρ depende unicamente da pressão. Já um fluido é dito incompressível quando sua massa específica ρ é constante. No escoamento de um fluido ideal, incompressível e homogêneo, ρ é constante e μ é nulo.

Estática dos fluidos

O fluido encontra-se em uma situação estática quando não há escoamento de uma porção deste fluido em relação à outra, i.e., quando não há escoamento relativo no seu interior, ou entre o fluido e a parede sólida que o envolve. Na condição estática, o fluido pode transladar-se de um ponto a outro ou rodar como um todo. Neste caso, atuam no fluido somente forças de pressão normais à superfície e forças de volume devido à ação de agentes externos. Nesta condição atuam as mesmas forças que no fluido ideal.

Equação diferencial da estática dos fluidos

A equação diferencial da estática dos fluidos pode ser baseada na segunda lei de Newton: “a resultante das forças que atuam em um elemento de volume de controle é igual à sua massa multiplicada pela aceleração na direção da força resultante”.

Consideremos um volume de controle paralelepípedico de fluido, referido a um sistema de eixos cartesianos de direção fixa porém arbitrária (Fig. 3.1). O corpo está

sujeito à força de volume ou força de campo, \vec{F}_c , que atua no centro de massa $C.M.$ segundo uma direção arbitrária. Essa força tem componentes cartesianas F_{cx} , F_{cy} , F_{cz} e é expressa por unidade de massa do fluido, i.e., tem as unidades de aceleração. Além da força de volume, o corpo está sujeito às pressões P que atuam normalmente nas superfícies.

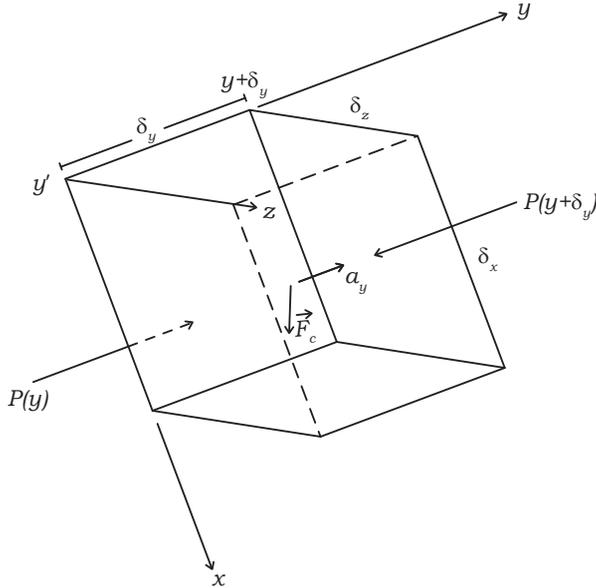


Figura 3.1

Na direção y a força resultante é expressa por:

$$\sum F_y = P(y)\delta_x\delta_z - P(y + \delta y)\delta_x\delta_z + F_{cy}\rho\delta_x\delta_y\delta_z.$$

Chamando de a_y a componente da aceleração do corpo na direção da força F_y , temos

$$-[P(y + \delta y) - P(y)]\delta_x\delta_z + \rho F_{cy}\delta_x\delta_y\delta_z = \rho a_y\delta_x\delta_y\delta_z. \tag{3.1}$$

Dividindo ambos os membros pelo volume $\delta_y\delta_x\delta_z$ chegamos a uma expressão da segunda lei de Newton, por unidade de volume do fluido

$$-\frac{P(y + \delta y) - P(y)}{\delta y} + \rho F_{cy} = \rho a_y. \tag{3.2}$$

Tomando o limite quando δ_y tende para zero, chegamos a

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho F_{cy} = \rho a_y. \tag{3.3}$$

Seguindo o mesmo procedimento em relação às direções x e z , temos:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_{cx} = \rho a_x, \quad (3.4)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho F_{cz} = \rho a_z. \quad (3.5)$$

Essas três últimas equações podem ser expressas por uma única equação independente de eixos de referência, i.e., por uma equação vetorial

$$-\text{grad}P + \rho \vec{F}_c = \rho \vec{a}, \quad (3.6)$$

onde cada termo tem unidades de força por unidade de volume, i.e., $\text{grad}P$ é a força de pressão, $\rho \vec{F}_c$ é a força de volume ou força de campo e $\rho \vec{a}$ é a chamada *força de inércia*. Nos problemas usuais de mecânica dos fluidos, a força gravitacional é a força de volume que atua nos elementos do contínuo; portanto, nas equações acima, $\vec{F}_c = \vec{F}_g$.

A equação (3.6) pode também ser considerada com um balanço de forças, i.e.,

$$-\text{grad}P + \rho \vec{F}_g - \rho \vec{a} = 0, \quad (3.7)$$

que representa o chamado *equilíbrio dinâmico* ou *equilíbrio relativo*. Quando o fluido está em repouso, a resultante das forças de pressão e da gravidade são nulas, ou seja,

$$-\text{grad}P + \rho \vec{F}_g = 0, \quad (3.8)$$

expressão que representa o chamado *equilíbrio estático*.

Equação em função da cota

É conveniente, nas aplicações, exprimir a força de campo \vec{F}_c em relação ao eixo de cotas, que é vertical e dirigido positivamente para cima. Decompondo o componente F_{cx} da força de campo em relação ao eixo \vec{h} , de acordo com a Figura 3.2, temos: $F_{cx} = F_{ch} \cos \alpha$, onde $\cos \alpha$ é o cosseno diretor do eixo x em relação ao eixo \vec{h} e F_{ch} é o componente de \vec{F}_c em \vec{h} .

Por outro lado, vemos na Figura 3.2 que um deslocamento δ_x no eixo x é acompanhado de um deslocamento δh no eixo \vec{h} ; portanto, $\cos \alpha = \delta h / \delta x$. Tomando infinitésimos e notando que conservamos y e z constantes nesses deslocamentos, temos $\cos \alpha = \partial h / \partial x$ e daí $F_{cx} = F_{ch}(\partial h / \partial x)$. Se o campo é gravitacional de aceleração constante \vec{g} dirigida verticalmente no sentido positivo contrário ao eixo \vec{h} e chamando simplesmente de F_g o componente da força gravitacional F_{gh} dirigido no sentido de \vec{h} , temos

$$F_{gx} = F_g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Analogamente, nas direções y e z ,

$$F_{gy} = F_g \frac{\partial h}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (3.10)$$

$$F_{gz} = F_g \frac{\partial h}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (3.11)$$

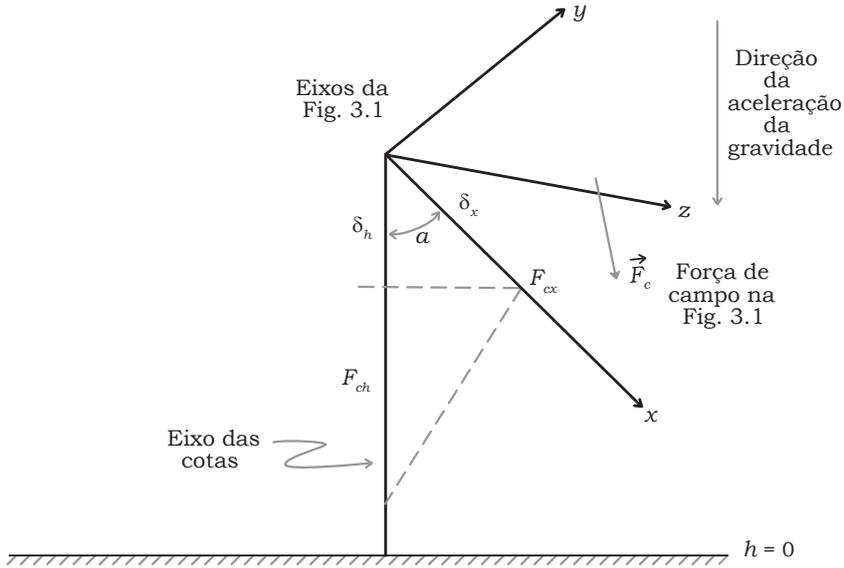


Figura 3.2

Substituindo essas expressões, respectivamente, nas equações (3.3) a (3.5) onde, no caso, $F_c = F_g$, resultam,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho gh) = a_x, \quad (3.12)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho gh) = a_y, \quad (3.13)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho gh) = a_z, \quad (3.14)$$

ou, sob a forma vetorial,

$$-\text{grad}(P + \rho gh) = \rho \vec{a}. \quad (3.15)$$

No fluido em repouso,

$$\text{grad}(P + \rho gh) = 0. \quad (3.16)$$

Referências

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 2, 1947.

TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulicas*, Editora Globo, Capítulo 2, 1960.

Aplicações das equações da estática de fluidos

Pressão em um ponto do fluido

Em um ponto, desprezando-se as forças de campo:

$$\text{grad } P = \nabla P = 0. \quad (4.1)$$

Segue-se que a pressão em um ponto de um fluido em condição estática é a mesma em todas as direções (Princípio de Pascal), i.e.,

$$P_x = P_y = P_z = P = C^{te}. \quad (4.2)$$

Esse princípio é aplicado tanto a um fluido na condição estática quanto no escoamento de um fluido ideal. Entretanto, este princípio não pode ser aplicado ao escoamento real de um fluido viscoso porque, neste caso, em um ponto, atuam as forças tangenciais que dependem da orientação da superfície em relação à direção do escoamento.

Distribuição horizontal da pressão

Considerando um fluido em repouso na superfície da terra e tomando a direção x como horizontal (Fig. 4.1), em cada ponto ao longo da direção horizontal do fluido em repouso, tanto a inércia quanto a força de volume são nulas e a equação (3.12) reduz-se a

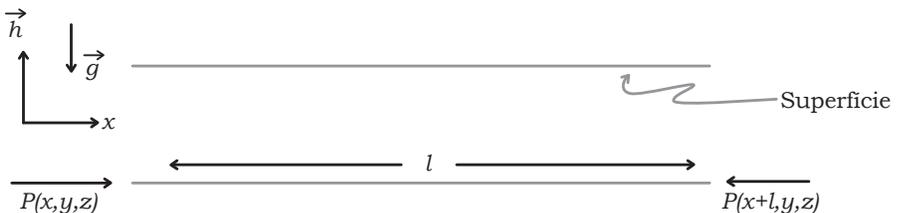


Figura 4.1

$$dP/dx = 0, \quad (4.3)$$

cuja solução é $P = \text{constante}$ ou,

$$P(x, y, z) = P(x + l, y, z). \quad (4.4)$$

Portanto, a pressão é constante ao longo de um plano horizontal em um fluido qualquer em repouso. Na realidade, as superfícies isobáricas são superfícies normais à direção da força da gravidade, ou seja, superfícies aproximadamente esféricas, concêntricas com a terra. Superfícies ortogonais a um campo de forças são chamadas em geral de *superfície nível*.

Distribuição vertical da pressão

Façamos a coincidência, em um fluido em repouso, do eixo z com o eixo vertical das cotas \vec{h} (Fig. 4.2). Neste caso a pressão depende exclusivamente da cota e, segundo a equação (3.14),

$$-\frac{dP}{dh} = \rho g = \gamma. \quad (4.5)$$

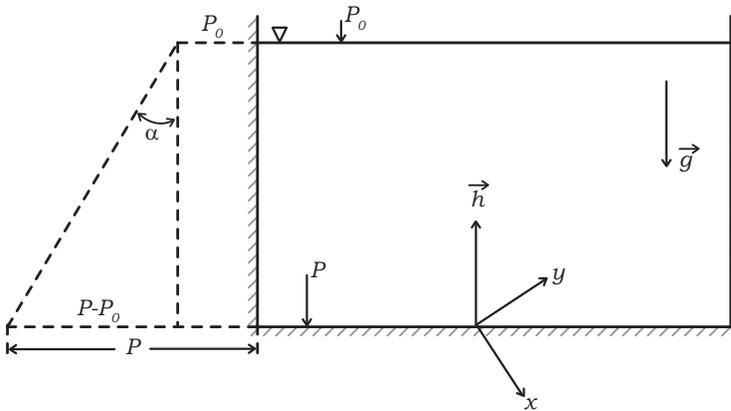


Figura 4.2

A equação (4.5) mostra que a pressão no interior de um fluido em repouso aumenta na direção da força da gravidade e que este aumento por unidade de cota é igual ao peso específico do fluido. Admitindo que o fluido é homogêneo e incompressível, a sua massa específica será constante em todo o contínuo e independente da cota h ; portanto, a integração da equação (4.5) fornece a relação básica do equilíbrio hidrostático.

$$P + \rho gh = P + \gamma h = C^{te}. \quad (4.6)$$

Dividindo ambos os membros pelo peso específico γ , temos

$$\frac{P}{\gamma} + h = C^{te}, \quad (4.7)$$

onde chamamos P/γ de *carga de pressão*, que tem unidade de comprimento.

Integrando a equação (4.5) do fundo do tanque (Fig. 4.2) onde a cota é nula até a superfície livre onde $h = h_0$, temos

$$h_0 = \frac{P - P_0}{\gamma}, \quad (4.8)$$

onde P_0 é a pressão atmosférica local. A diferença entre a pressão absoluta P e a pressão atmosférica P_0 é a pressão manométrica ou pressão efetiva.

A equação (4.5) diz que a pressão é uma função linear de h e que

$$\text{tg } \alpha = \gamma = -\frac{dP}{dh}, \quad (4.9)$$

conforme ilustrado à esquerda da Figura 4.2. É claro também que o formato do vaso não tem influência no valor da pressão em um dado nível que só depende da cota.

Manômetros

Manômetro é um instrumento usado para medir pressão. O tipo mais simples, o piezômetro (Fig. 4.3) que através da coluna h mede a pressão no ponto A , i.e., $P_A - P_0 = \gamma h$. A pressão manométrica ou efetiva é expressa por

$$P_A = \gamma h. \quad (4.10)$$

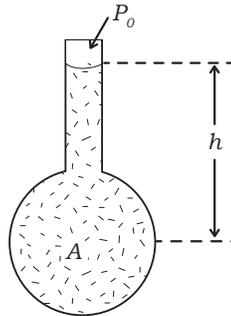


Figura 4.3

O tubo *U simples* (Fig. 4.4) pode ser usado para medir pressões menores que a pressão atmosférica, i.e., $P_0 = P_A + \gamma h$. A pressão manométrica é dada por

$$P_A = -\gamma h. \quad (4.11)$$

O tubo *U simples* também pode ser usado para medir maiores pressões positivas ou negativas com o emprego de um líquido manométrico mais pesado (Fig. 4.5) de peso específico γ_m . Nesse caso $P_0 + h_1\gamma_m = P_A + h_2\gamma_f$. A pressão efetiva em A é então expressa por

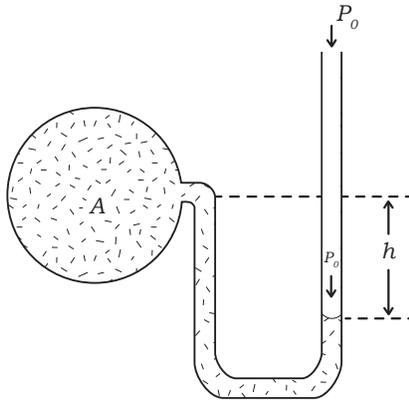


Figura 4.4

$$P_A = h_1 \gamma_m - h_2 \gamma_f. \quad (4.12)$$

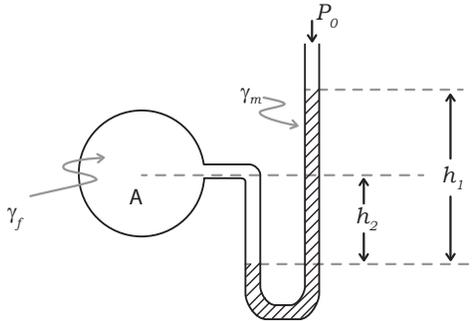


Figura 4.5

O tubo U diferencial é muito usado para medir diferenças de pressão (Fig. 4.6). Chamando de L (leitura manométrica) a diferença entre os níveis do líquido manométrico de peso específico γ_m e efetuando o balanço de pressões chegamos a

$$P_1 - P_2 = L(\gamma_m - \gamma_f). \quad (4.13)$$

Em função da densidade relativa, temos:

$$P_1 - P_2 = L \gamma_a (d_m - d_f), \quad (4.14)$$

onde γ_a é o peso específico da água.

Para a leitura de pequenas diferenças de pressão, usa-se o *manômetro multiplicador de dois fluidos* manométricos (Fig. 4.7). Usando os índices f para o fluido cuja

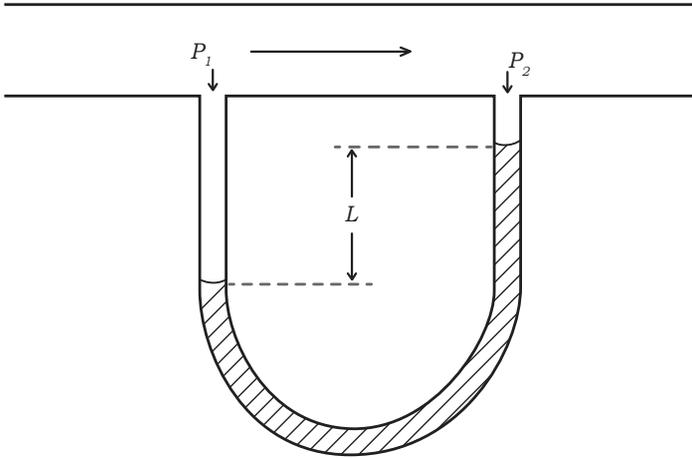


Figura 4.6

pressão queremos determinar, l para o fluido manométrico leve e p para o pesado e efetuando o balanço de pressões, temos

$$P_1 + \gamma_f h + \gamma_l L = P_2 + \gamma_l h + \gamma_p L$$

Entretanto, $hA = La$, i.e., $h = La/A$, portanto,

$$P_1 - P_2 = L \left[(\gamma_p - \gamma_l) + \frac{a}{A} (\gamma_l - \gamma_f) \right]. \quad (4.15)$$

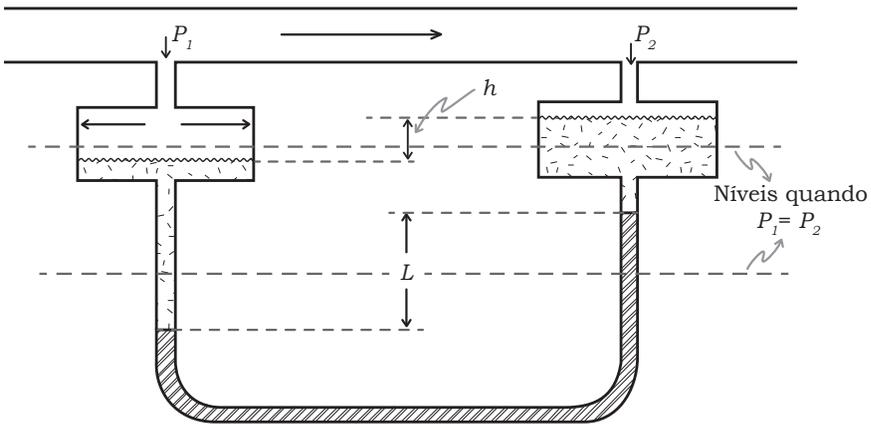


Figura 4.7

O valor de $(a/A)(\gamma_l - \gamma_f)$ pode ser desprezado quando a/A é suficientemente pequeno ou quando o fluido f é um gás, resultando

$$P_1 - P_2 = L(\gamma_p - \gamma_l). \quad (4.16)$$

Quanto mais próximos forem os valores de γ_p e γ_l , maior a leitura manométrica L para certo $P_1 - P_2$.

Outro tipo de manômetro multiplicador usado especialmente para medir pequenas diferenças de pressão de gases, é o *manômetro inclinado* (Fig. 4.8).

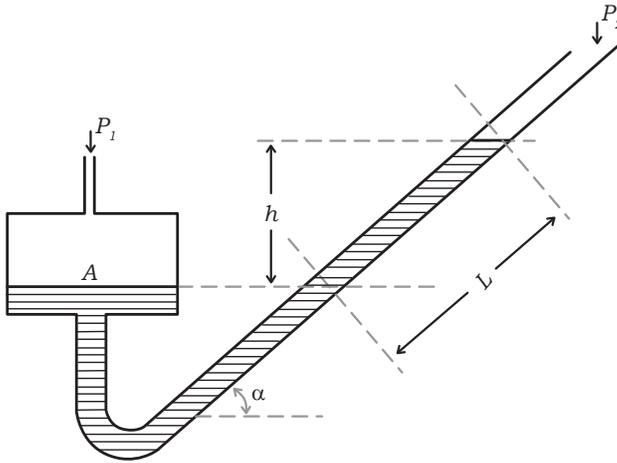


Figura 4.8

A relação entre a diferença de nível e a leitura é dada por:

$$L = \frac{h}{\text{sen } \alpha}. \quad (4.17)$$

Quando o desnível no reservatório A é pequeno, o balanço de pressões fornece

$$P_1 + h\gamma_f = P_2 + h\gamma_m, \quad (4.18)$$

$$P_1 - P_2 = h(\gamma_m - \gamma_f) = L \text{sen } \alpha (\gamma_m - \gamma_f). \quad (4.19)$$

Quanto menor for o ângulo α maior será a leitura L para um dado P .

Referências

STREETER, V.L. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 2, 1958.

MELLO FLORES, J.O. de. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Notas Mimeografadas, Escola Nacional de Engenharia, Capítulo 2, 1961.

Aceleração horizontal

Admitindo que o fluido sofre uma aceleração horizontal na direção x , além de estar sujeito à aceleração da gravidade na direção $-h$; temos, a partir das equações (3.12) e (3.14), que

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x, \quad (5.1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial h} = \rho g. \quad (5.2)$$

Então, a variação total de $P = P(x, h)$ é dada por $dP = (\partial P/\partial x)dx + (\partial P/\partial y)dy$, ou seja,

$$dP = -\rho a_x dx - \rho g dh. \quad (5.3)$$

Na Figura 5.1 o vaso está sujeito a uma aceleração uniforme a_x e o líquido move-se como um sólido sem escoamento relativo entre suas camadas, sujeito, portanto, ao equilíbrio relativo.

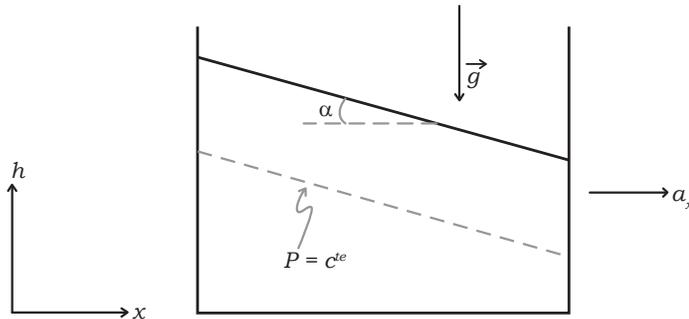


Figura 5.1

Na superfície livre a pressão é constante, portanto, é representada por uma reta cujo coeficiente angular é

$$-dh/dx = a_x/g = \text{tg } \alpha. \quad (5.4)$$

Os planos de pressão constante são planos oblíquos e paralelos à superfície livre do líquido. Mesmo quando não há superfície livre, no caso de um vaso fechado cheio de líquido, as superfícies isobáricas são ainda expressas pela equação (5.4).

Rotação uniforme

A Figura 5.2 representa um vaso cilíndrico circular girando em torno do eixo vertical e contendo um líquido que gira como um sólido, cujos elementos descrevem trajetórias circulares. Os elementos do líquido estão sujeitos à aceleração centrípeta

$$a_r = -\omega^2 r, \quad (5.5)$$

onde ω é a velocidade angular de um elemento que gira no círculo de raio r . Os componentes da segunda lei de Newton nas direções radial e axial são

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \omega^2 r, \quad (5.6)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial h} = \rho g. \quad (5.7)$$

Portanto, a variação total de $P = P(r, h)$ é

$$dP = \rho \omega^2 r dr - \rho g dh. \quad (5.8)$$

Integrando a equação (5.8) temos,

$$\int_{P_0}^P dP = \int_0^r \rho \omega^2 r dr - \int_{h_0}^h \rho g dh, \quad (5.9)$$

$$P - P_0 = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g(h - h_0). \quad (5.10)$$

Na superfície livre $P = P_0$, i.e.,

$$h - h_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (5.11)$$

que é a equação de um parabolóide de revolução cujo traço no plano h, r de simetria é visto na Fig. 5.2. As superfícies de pressão constante no interior do fluido são igualmente superfícies de parabolóides de revolução em torno do eixo de rotação do vaso. O traço dessas superfícies no plano h, r é dado por:

$$h - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - \frac{P - P_0}{\rho g}. \quad (5.12)$$

No eixo, para $r = 0$, a variação de pressão é a mesma que a do fluido em repouso:

$$P - P_0 = -\rho g(h - h_0). \quad (5.13)$$

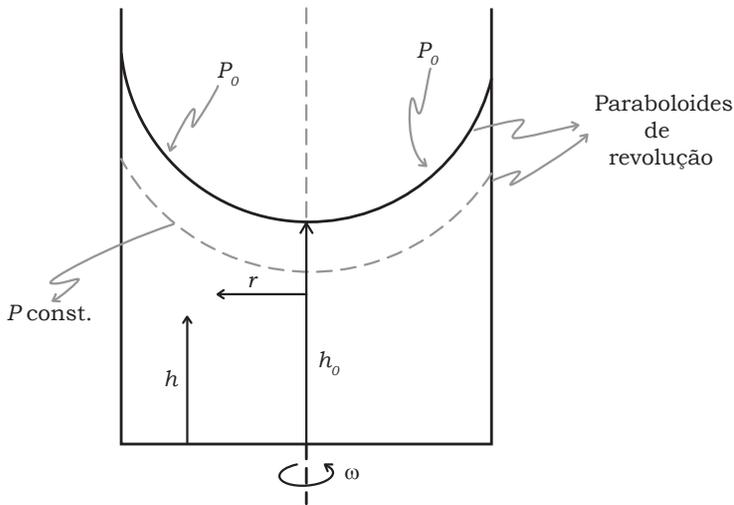


Figura 5.2

O aumento de pressão com o quadrado do raio constitui o princípio da operação de bombas centrífugas e das centrífugas em geral.

Conceito de potencial

No caso de um fluido em equilíbrio estático a aceleração a é nula e os componentes cartesianos da equação (3.6) reduzem-se a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F_{cx}, \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = F_{cy}, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = F_{cz}. \quad (5.16)$$

Como a pressão P é uma função contínua das ordenadas, $P = P(x, y, z)$, a variação total de P é dada pela diferencial exata

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz, \quad (5.17)$$

onde as derivadas parciais são dadas pelas equações (5.14) a (5.16). Portanto,

$$dP = \rho(F_{cx} dx + F_{cy} dy + F_{cz} dz). \quad (5.18)$$

Se o fluido em repouso é incompressível e homogêneo, ρ é constante e a expressão $F_{cx} dx + F_{cy} dy + F_{cz} dz$ deve obrigatoriamente ser uma diferencial exata. Segue-se

que o vetor \vec{F}_c admite *necessariamente* um potencial que chamamos de Ω , também diferencial exata, i.e.,

$$dP = \rho d\Omega = \rho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz \right). \quad (5.19)$$

Portanto, no caso de um fluido homogêneo e incompressível, o equilíbrio estático só é possível quando as forças de campo são *conservativas*.

A expressão vetorial do equilíbrio estático é, a partir da equação (3.6):

$$\text{grad } P = \rho \vec{F}_c. \quad (5.20)$$

A força da gravidade é um exemplo de força conservativa, portanto, fazendo o eixo z coincidir com o eixo das cotas h , temos,

$$\text{grad } P = \frac{dP}{dh} = \rho \vec{F}_g = -\rho g, \quad (5.21)$$

ou, de acordo com a equação (5.19):

$$\vec{F}_g = -g = \frac{d\Omega}{dh}, \quad (5.22)$$

onde Ω toma o nome de potencial gravidade. A equação (5.22) mostra que a variação máxima de Ω no campo gravitacional, ou seja, a variação de Ω ao longo do eixo das cotas \vec{h} , é igual à força da gravidade na direção contrária à direção da aceleração da gravidade. Há vantagem em considerar uma grandeza vetorial como igual ao gradiente de uma grandeza escalar, i.e., no caso, $F_g = \text{grad } \Omega$, porque \vec{F}_g é definido por módulo e direção e Ω somente pelo módulo. No campo gravitacional o potencial Ω tem uma interpretação particularmente simples. Integrando a equação (5.22) entre duas cotas arbitrárias h e h_0 e tomando Ω nulo quando $h = h_0$, temos

$$\Omega = -g(h - h_0). \quad (5.23)$$

A energia potencial por unidade de massa é definida como o trabalho *gasto* para elevar a unidade de massa do fluido da cota h_0 até a cota h , portanto, a equação (5.23) mostra que Ω tem o mesmo valor que a energia potencial, ao mesmo nível. Segue-se que em superfícies de nível que foram definidas como superfícies praticamente horizontais, ortogonais à força da gravidade, são também superfícies de potencial ou de pressão constante.

A equação geral das superfícies de nível em um campo de forças conservativas é dada por

$$F_{cx} dx + F_{cy} dy + F_{cz} dz = 0, \quad (5.24)$$

tal como indica a equação (5.18).

Forças em áreas planas submersas

As equações básicas (3.3) a (3.5) podem ser aplicadas ao cálculo do módulo e do ponto de aplicação de forças que atuam em paredes de barragens e tanques, na face de comportas, etc. O ponto de aplicação da força resultante é chamado de *centro de pressão*.

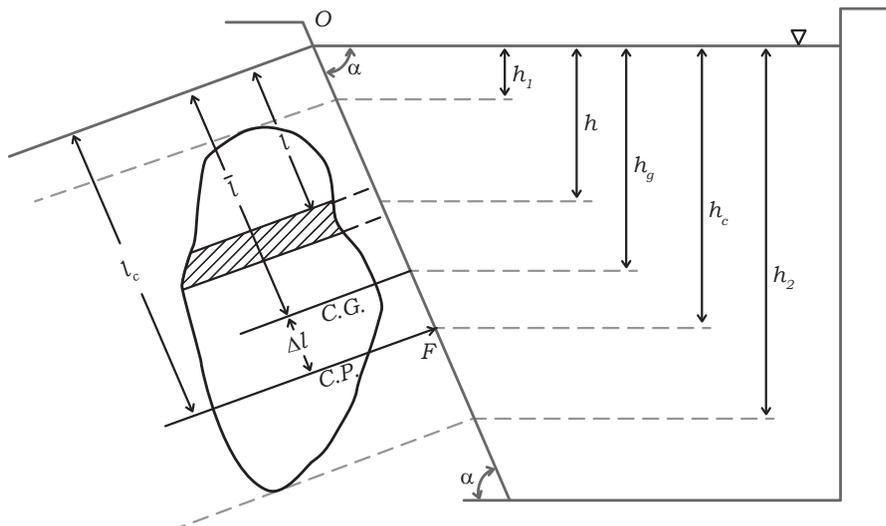


Figura 5.3

Na Figura 5.3, a pressão hidrostática na profundidade h é $P = \gamma h$ e a força que atua no elemento de área dS é dada por $dF = PdS = \gamma h dS$, portanto, a força total que atua na área de formato arbitrário é dada pelas expressões

$$F = \gamma \int_0^S h dS = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_0^S l dS, \quad (5.25)$$

$$F = M_{OS} \gamma \operatorname{sen} \alpha = \gamma \bar{l} S \operatorname{sen} \alpha,$$

onde M_{OS} é o momento estático da área S em relação a O . Como $h_g = \bar{l} / \operatorname{sen} \alpha$, temos também

$$F = P_G S = \gamma h_g S. \quad (5.26)$$

A equação (5.26) mostra que a força total devido à pressão hidrostática que atua em uma superfície plana inclinada é igual à área da superfície vezes a pressão em seu centro de gravidade; essa força não depende da inclinação da superfície.

A posição do centro de pressão pode ser determinada igualmente com os momentos em relação a O das forças que atuam nos elementos dS de área, ao momento total $F l_c$, i.e.,

$$\int \gamma h l dS = F l_c$$

Nesta expressão, $h = l \operatorname{sen} \alpha$, portanto

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha \int l^2 dS = Fl_c,$$

onde $\int l^2 dS$ é o momento de inércia da área S em relação a O . Então,

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha I_{OS} = Fl_c, \quad (5.27)$$

e, de acordo com a equação (5.25),

$$l_c = \frac{I_{OS}}{M_{OS}}. \quad (5.28)$$

A profundidade do centro de pressão pode então ser calculada por

$$h_c = l_c \operatorname{sen} \alpha. \quad (5.29)$$

Podemos demonstrar que o centro de pressão está sempre abaixo do centro de gravidade. Chamando a distância entre os dois centros de Δl e considerando que o momento de inércia da área S em relação a um eixo horizontal que passa pelo centro de gravidade é dado por $I_{GS} = I_{OS} - l^2 S$, temos,

$$\Delta l = \frac{I_{GS} + l^2 S}{\bar{l} S} - \bar{l} = \frac{I_{GS}}{\bar{l} S}. \quad (5.30)$$

Quando a área S é assimétrica podemos obter as coordenadas do *C.P.* tomando os momentos em relação a eixos convenientemente localizados.

Forças em superfícies curvas submersas

Na Figura 5.4 as forças de pressão agem perpendicularmente em qualquer ponto da superfície curva e podem ser decompostas nos componentes F_x , horizontal, e F_y , vertical. O componente horizontal da força elemental $P dS$ é $P dS \operatorname{sen} \alpha$ ou, como $dh = dS \operatorname{sen} \alpha$ (S é área por unidade de largura), a força horizontal total tem como módulo

$$F_x = \int_1^2 P dh = \gamma \int_1^2 h dh = \frac{\gamma}{2} (h_2^2 - h_1^2) = \gamma S_y \bar{h}, \quad (5.31)$$

onde $\bar{h} = (h_1 + h_2)/2$ e S_y é a projeção da superfície curva no plano vertical, i.e., $S_y = h_2 = h_1$.

Na equação (5.31), $S_y \bar{h}$ é o momento estático da área projetada em relação a O , portanto, a força horizontal atua como se a parede fosse plana e vertical.

O componente vertical das forças de pressão que agem nos elementos de área é $P dS \cos \alpha$ onde $dS \cos \alpha = dS_x$, portanto, a força vertical total tem como módulo

$$F_y = \int P dS_x = \gamma \int h dS_x, \quad (5.32)$$

que é o peso da coluna vertical do líquido sobre a superfície curva.

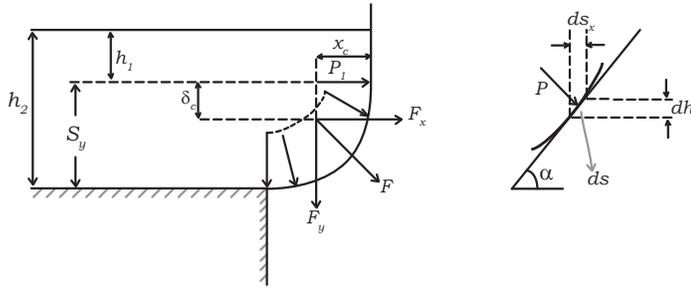


Figura 5.4

Flutuação de corpos imersos

O corpo prismático de peso $F_p = \gamma_s V$ (Fig. 5.5) está sujeito à força de flutuação $F_f = S(P_2 - P_1) = S\gamma_f(h_2 - h_1)$, portanto, a força resultante é expressa por

$$F_p - F_f = V(\gamma_s - \gamma_f). \quad (5.33)$$

Essa força é independente da profundidade de imersão, i.e., no caso de imersão parcial $V = S(h_2 - h_1)$ é o volume submerso.

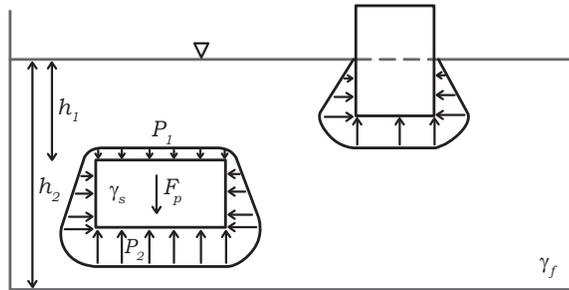


Figura 5.5

A equação (5.33) mostra que um corpo imerso em um fluido *perde* um peso igual ao peso do volume de fluido deslocado (Princípio de Arquimedes).

O ponto de aplicação da força de flutuação é o *centro de flutuação*, que está localizado no centro de gravidade do volume deslocado, porque a força de flutuação é igual ao peso deste volume. O centro de flutuação é também chamado de *centro de empuxo* e a força de flutuação simplesmente de *empuxo*.

Consideremos o efeito do peso e do empuxo na imersão do corpo:

- Quando $F_p = F_f$, são iguais os pesos específicos do fluido e do corpo, que permanecerá imóvel.
- Quando $F_p > F_f$, o corpo afunda.

- c) Se $F_p < F_f$ o corpo sobe e, se o fluido tem uma superfície livre, haverá uma flutuação tal que $F_f = F_p$.
- d) Quando o corpo é mais compressível que o fluido, a sua densidade aumenta com a profundidade mais rapidamente que a densidade do fluido, então o corpo vai para o fundo.
- e) Se o corpo é menos compressível que o fluido, sua profundidade de imersão será determinada pela igualdade de densidade, do corpo e do fluido.

Referências

BARNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 1, 1957.

STREETER, V.L. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 2, 1958.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 2, 1947.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 2, 1961.

TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulica*, Editora Globo, Capítulo 3, 1960.

Conservação de massa

O princípio geral da conservação de uma grandeza extensiva, tal como a energia, a quantidade de movimento ou a massa, pode ser expressa por

$$\text{entrada} - \text{saída} + \text{fonte} - \text{sumidouro} = \text{taxa de acumulação.} \quad (6.1)$$

Aplicada a conservação da massa em um volume de controle isolado em um fluido em escoamento, cada termo desta expressão pode ser interpretado como uma taxa. Assim, a taxa de acumulação de massa no volume de controle é igual à diferença entre as vazões de entrada e a de saída mais a diferença entre as taxas de geração e de absorção do fluido no interior do volume de controle. No caso comum em que não há nem fonte nem sumidouro no volume de controle, a taxa de acumulação será, logicamente, igual à diferença entre as vazões mássicas de entrada e de saída. A expressão matemática do princípio da conservação de massa, aplicado a um fluido em escoamento, nesse caso comum de ausência de fonte e de sumidouro no volume de controle, é chamado de *equação da continuidade*.

Fluxo

O fluxo de uma grandeza extensiva em escoamento através de uma superfície de controle é definido como a quantidade dessa grandeza que atravessa a unidade de área da superfície na unidade de tempo. Se a grandeza que escoar é um escalar, o fluxo será um vetor e se for um vetor, o fluxo será um tensor. Consideraremos somente, neste curso, o fluxo de grandezas escalares.

O fluxo total de transferência de uma grandeza extensiva escalar por vários mecanismos, é igual à soma vetorial dos fluxos individuais devidos a cada um dos mecanismos. Chamamos de \vec{G} ao fluxo de uma grandeza escalar qualquer; por exemplo o calor. Quando o calor é transferido por condução e convecção, temos,

$$q_{total}/A = \vec{G}_{calor\ total} = \vec{G}_{calor\ cond.} + \vec{G}_{calor\ conv.} \quad (6.2)$$

Chamando de C a “concentração” de uma grandeza física que transfere-se convectivamente com o escoamento de um fluido cuja velocidade é \vec{v} , o fluxo será expresso, de um modo geral, por

$$\vec{G} = C\vec{v}. \quad (6.3)$$

Tomemos alguns exemplos:

1. A “concentração” de massa é expressa pela massa específica ρ , portanto, o fluxo de massa é dado pelo vetor

$$\vec{G}_{massa} = C_m \vec{v} = \rho \vec{v}, \quad (6.4)$$

cujos componentes cartesianos são $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$.

2. A “concentração” da quantidade de movimento em um fluido em escoamento é representada pelo vetor $\vec{c}_{qm} = \rho \vec{v}$ e o seu fluxo seria dado por um tensor. Considerando, entretanto, o fluxo do componente x da quantidade de movimento, teremos

$$\vec{G}_{qm} = (\rho v_x) \vec{v}, \quad (6.5)$$

que é um vetor.

Equação da continuidade de massa para um elemento fixo e coordenadas cartesianas

Consideremos os fluxos de massa que entram e saem do prisma retangular ilustrado na Figura 6.1. Este volume de controle do fluido em escoamento está fixo no espaço e seus lados δx , δy e δz não se alteram com o tempo. No ponto (x, y, z) a velocidade \vec{v} é desdobrada nos componentes v_x, v_y e v_z . Considerando a direção x , as vazões que entram e saem do elemento são determinadas pelo produto do fluxo pela área, i.e.,

$$\text{entrada} = \rho v_x (\delta y \delta z), \quad (6.6)$$

$$\text{saída} = \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \delta x \right] (\delta y \delta z). \quad (6.7)$$

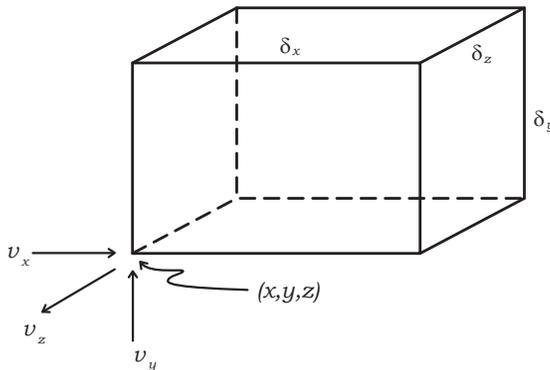


Figura 6.1

A taxa de acumulação é expressa por

$$\text{taxa de acumulação} = \frac{\partial \rho}{\partial t} (\delta x \delta y \delta z). \quad (6.8)$$

Admitindo que não há nem fonte nem sumidouro no elemento, vale a expressão da equação de continuidade:

$$\begin{aligned} \text{taxa de acumulação} &= \text{entrada} - \text{saída}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Seguindo o mesmo processo para as direções y e z e somando as vazões nas seis faces, resulta,

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6.10)$$

Se o escoamento é permanente, a taxa de acumulação é nula, i.e.,

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (6.11)$$

Se o escoamento é incompressível e homogêneo, i.e., se ρ é constante, a equação de continuidade é expressa por

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (6.12)$$

Essa expressão é válida tanto para escoamento permanente como para o transiente.

Equação da continuidade para elemento móvel

Definimos um elemento de massa δm constante, com os lados paralelos aos eixos cartesianos. Na Figura 6.2 o ponto (x, y, z) representa a posição instantânea do elemento que se move com a velocidade \vec{v} do fluido. Os componentes de \vec{v} são: v_x , v_y e v_z . Os lados l_x , l_y e l_z podem variar de comprimentos porque a massa específica do fluido pode se alterar ao longo do movimento. A massa do elemento é expressa por

$$\delta m = \rho l_x l_y l_z, \quad (6.13)$$

que, derivada em relação ao tempo, dá

$$\frac{d\delta m}{dt} = 0 = \rho \left[l_x l_y \frac{dl_z}{dt} + l_x l_z \frac{dl_y}{dt} + l_y l_z \frac{dl_x}{dt} \right] + l_x l_y l_z \frac{d\rho}{dt}. \quad (6.14)$$

Consideremos a taxa de variação do lado l_x do elemento, notando que no tempo δt o ponto (x, y, z) terá se deslocado para o ponto $(x + v_x \delta t, y + v_y \delta t, z + v_z \delta t)$ enquanto que o ponto $(x + l_x, y, z)$ moveu-se para

$$\left[x + l_x + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} l_x \right) \delta t, y + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} l_x \right) \delta t, z + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} l_x \right) \delta t \right].$$

As projeções desta linha nos três eixos coordenados que, originalmente, tinham comprimentos $l_x, 0, 0$, terão agora os valores

$$l_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} l_x \delta t, \frac{\partial v_y}{\partial x} l_x \delta t, \frac{\partial v_z}{\partial x} l_x \delta t.$$

O comprimento desta linha é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das três projeções, i.e., desprezando as segundas potências de δt , o comprimento é igual a

$$l_x \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta t \right).$$

Esse comprimento pode ser igualado ao determinado pela série de Taylor, i.e.,

$$l_x + \frac{dl_x}{dt} \delta t = l_x \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta t \right), \quad (6.15)$$

ou seja, simplificando,

$$\frac{dl_x}{dt} = l_x \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (6.16)$$

Analogamente, considerando as direções y e z , temos

$$\frac{dl_y}{dt} = l_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (6.17)$$

$$\frac{dl_z}{dt} = l_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (6.18)$$

Substituindo estes valores na equação (6.14) e simplificando, resulta

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (6.19)$$

onde a derivada substantiva $D\rho/Dt$ é expressa por

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z. \quad (6.20)$$

Eliminando $D\rho/Dt$ entre essas duas últimas equações resulta a expressão da equação da continuidade na forma da equação (6.10).

Conceito de derivada substantiva

A derivada substantiva é um tipo especial de derivada total em relação ao tempo. Tomemos como exemplo a derivada substantiva da grandeza escalar ρ que foi introduzida na equação (6.19). A massa específica ρ varia com a posição e com o tempo, i.e., $\rho = \rho(x, y, z, t)$. A expressão da sua derivada total em relação ao tempo é de um modo geral dado por

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (6.21)$$

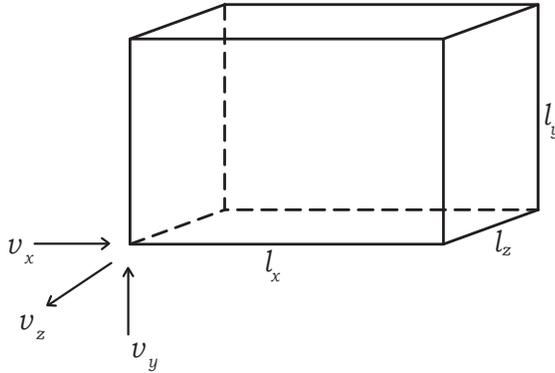


Figura 6.2

A equação (6.20) é um caso especial em que dx/dt , dy/dt e dz/dt representa os componentes v_x , v_y e v_z da velocidade \vec{v} do fluido no local onde se está observando a variação total da massa específica com o tempo. A derivada substantiva é também chamada de *derivada que acompanha o movimento*, porque reflete a velocidade local do escoamento \vec{v} . O conceito de derivada substantiva pode ser explicado imaginando-se um instrumento capaz de medir instantaneamente a massa específica em qualquer ponto do fluido em escoamento. Se a ponta sensível desse instrumento move-se com a velocidade \vec{v} do fluido, dx/dt , dy/dt e dz/dt da equação geral (6.21) são idênticos aos componentes v_x , v_y e v_z da velocidade do fluido. Diz-se, então, que o *observador* (ponta sensível do instrumento) move-se com o fluido. Para esse “observador” móvel, a variação de massa específica é expressa pela derivada substantiva (eq. (6.20)).

Se o “observador” se move com velocidade diferente da do fluido, dx/dt , dy/dt e dz/dt não serão mais idênticos a v_x , v_y e v_z , no entanto, a variação de ρ é dada pela expressão geral (eq. (6.21)).

A derivada substantiva pode ser decomposta em duas parcelas. Uma é a taxa de variação local $\partial\rho/\partial t$ que é a *derivada local* em relação ao tempo e a outra é a razão de variação de ρ em relação à posição em um dado instante, que é representada pela derivada convectiva, i.e.,

$$\text{derivada convectiva} = \frac{\partial\rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial\rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial\rho}{\partial z} v_z. \quad (6.22)$$

Segue-se que, conforme mostra a equação (6.20), a derivada substantiva é a soma da derivada local com a derivada convectiva.

Conceito vetorial de derivada substantiva

Consideremos preliminarmente o caso mais simples de visualizar: a variação da grandeza escalar temperatura de um elemento fluido com o tempo, conforme este elemento se movimenta em um campo. No caso geral, a distribuição de temperatura no

campo pode variar com o tempo. A Figura 6.3 mostra uma distribuição válida durante um pequeno intervalo de tempo δt .

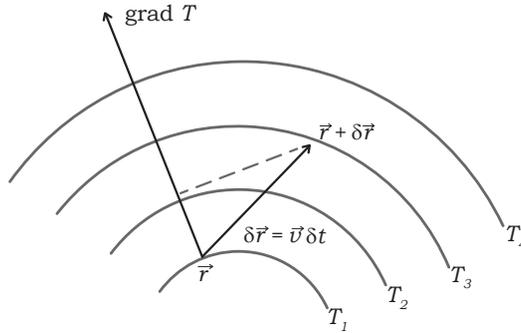


Figura 6.3

Em um dado instante, o elemento fluido encontra-se no ponto assinalado pelo vetor posição \vec{r} . Se o elemento permanecer neste ponto enquanto o campo de temperatura varia com o tempo t haverá somente variação local de temperatura cuja taxa é expressa por $\partial T/\partial t$. Se, entretanto, no intervalo de tempo δt o elemento se deslocar para o ponto assinalado pelo vetor $\vec{r} + \delta\vec{r}$, haverá variação convectiva de temperatura devido ao movimento do elemento. Quando o campo é permanente esta será a única variação de temperatura. A variação convectiva depende de dois fatores:

1. do vetor que representa a velocidade do elemento;
2. da distribuição da temperatura no espaço, i.e., do gradiente de temperatura.

Quando o elemento fluido se desloca do ponto \vec{r} para o ponto $\vec{r} + \delta\vec{r}$ durante o tempo δt , a variação de temperatura do elemento será igual à projeção do vetor $\delta\vec{r} = \vec{v}\delta t$ na normal no ponto \vec{r} multiplicado pelo gradiente de temperatura, i.e., a variação de temperatura é dada pelo produto escalar

$$\delta T = \vec{v}\delta t \cdot \text{grad } T. \quad (6.23)$$

Portanto, a taxa de variação convectiva, i.e., a derivada convectiva da temperatura em relação ao tempo é expressa por

$$\text{derivada convectiva} = \lim_{\delta t \rightarrow t} \frac{\delta T}{\delta t} = \vec{v} \cdot \text{grad } T. \quad (6.24)$$

Deste modo, a taxa de variação total da temperatura do elemento será dada pela derivada substantiva

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\delta T}{\delta t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})T, \quad (6.25)$$

onde $(\vec{v} \cdot \text{grad})$ pode ser considerado como um operador

$$\vec{v} \cdot \text{grad} = \vec{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.26)$$

Considerando a derivada substantiva cartesiana do operador (eq. (6.26))

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\rho, \quad (6.27)$$

ou, de acordo com a expressão cartesiana do operador (eq.(6.26))

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z},$$

que é a equação (6.20).

Em geral, a derivada substantiva de uma grandeza vetorial ou mesmo de uma grandeza tensorial é expressa pela equação

$$\frac{D_{\text{grandeza}}}{Dt} = \frac{\partial_{\text{grandeza}}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\text{grandeza}. \quad (6.28)$$

Referências

LONGWELL, P. A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 2, 1958.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 7, 1934.

BENNETT, C.O.; MYERS, J.E. *Momentum, Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 9, 1962.

Forma integral da equação da continuidade

Consideremos um volume de controle de área S (Fig. 7.1). No intervalo de tempo δt uma partícula de fluido desloca-se através da distância $\vec{v}\delta t$, entretanto, somente o componente normal de \vec{v} , $\vec{v} \cdot \vec{n} = v \cos \alpha$, contribui para a vazão que atravessa δS . Essa vazão será positiva quando for dirigida de dentro para fora do volume de controle, i.e., quando for uma vazão de saída; será negativa no caso contrário, porque a direção positiva de \vec{n} , vetor unitário normal à superfície, é convencionalmente dirigida para fora. Segue-se que o saldo de saída de vazão mássica é expresso por

$$\text{saída} - \text{entrada} = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S \rho v \cos \alpha dS, \quad (7.1)$$

onde v denota o módulo de \vec{v} .

Se houver déficit de saída, i.e., saldo de entrada, o segundo membro desta equação deverá ter um sinal negativo.

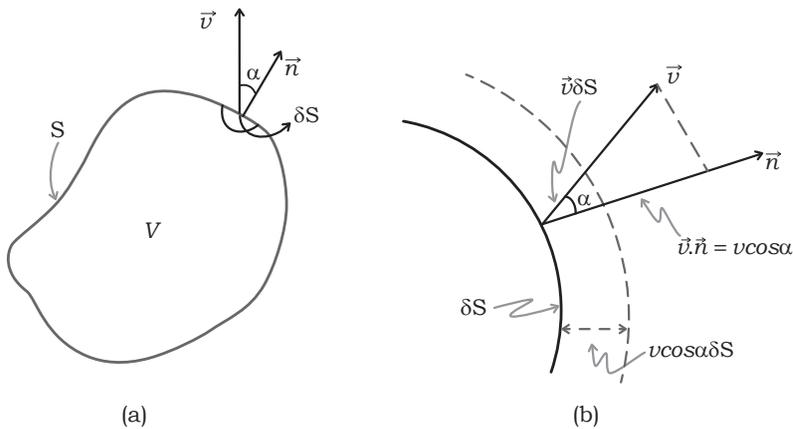


Figura 7.1

A variação de massa que ocorre no volume de controle (no caso, diminuição) é expressa por

$$\text{taxa de acumulação} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \quad (7.2)$$

portanto, na ausência de fonte e sumidouro, a expressão integral da equação da continuidade é dada por

$$\int_S \rho v \cos \alpha dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0. \quad (7.3)$$

No caso particular do escoamento permanente, a taxa de acumulação é nula, e,

$$\int \rho v \cos \alpha dS = 0. \quad (7.4)$$

Quando o escoamento, além de permanente, é homogêneo e incompressível, ρ é constante e,

$$\int_S v \cos \alpha dS = 0. \quad (7.5)$$

Equações da continuidade em coordenadas cilíndricas e esféricas

Para certos tipos de problema é útil exprimir a equação da continuidade expressa em coordenadas cilíndricas (Fig. 7.2) ou em coordenadas esféricas (Fig. 7.3). Em coordenadas cilíndricas o volume do volume de controle é dado por $r \delta_\psi \delta_x \delta_r$ e, em coordenadas esféricas, por $r^2(\sin \phi) \delta_\psi \delta_r$.

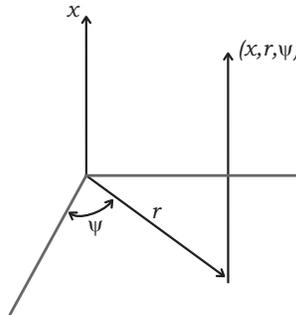


Figura 7.2

Coordenadas cilíndricas

Considerando um elemento de volume estacionário temos, de acordo com a Figura 7.2.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (\rho v_\psi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (7.6)$$

ou, usando a derivada substantiva,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = 0. \quad (7.7)$$

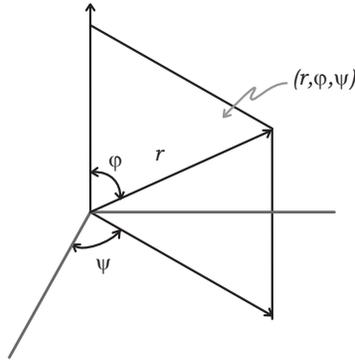


Figura 7.3

Coordenadas esféricas

Tomando o elemento imóvel temos, de acordo com a Figura 7.3,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi \sin \phi) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\rho v_\psi) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (7.8)$$

ou, com a derivada substantiva,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi \sin \phi) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \right] = 0. \quad (7.9)$$

Expressões vetoriais da equação continuidade

A equação (6.10) pode ser escrita de maneira compacta e independente de eixos de referência, do seguinte modo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (7.10)$$

Expandindo o $\text{div}(\rho \vec{v})$, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \vec{v} = 0. \quad (7.11)$$

Para o escoamento permanente, a equação (6.11) é dada por

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.12)$$

enquanto que, no escoamento incompressível e homogêneo, a equação (6.12) é expressa por

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (7.13)$$

Empregando a derivada substantiva, podemos exprimir vetorialmente a equação (6.19) do seguinte modo

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (7.14)$$

De acordo com o teorema de Gauss, a integral de superfície da equação (7.1) é igual à integral de volume seguinte:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = 0, \quad (7.15)$$

portanto, a equação (7.3) pode ser escrita do seguinte modo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = 0. \quad (7.16)$$

Como essa expressão é verdadeira por menor que seja o volume de controle, podemos abandonar o sinal de integral e exprimir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.10)$$

que é a forma geral da equação de continuidade do volume fixo (eq. (7.10)).

O divergente de uma grandeza vetorial \vec{f} , igual a $\rho \vec{v}$ na equação (7.10) do volume fixo, ou igual a \vec{v} na equação (7.14) do volume móvel, pode ser expresso em coordenadas cartesianas como

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}, \quad (7.17)$$

em coordenadas cilíndricas por

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad (7.18)$$

e, em coordenadas esféricas por

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (f_\phi \sin \phi) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f_\psi}{\partial \psi}. \quad (7.19)$$

Referências

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 2, 1958.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 2, 1957.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 3, 1947.

Cinemática do escoamento

A cinemática do escoamento consiste em descrever a velocidade em módulo e direção em cada ponto do fluido. Esta descrição de ponto a ponto é necessária porque o fluido não é rígido e, em geral, não tem a mesma velocidade em todos os pontos. O estudo da cinemática é, então, o estudo de um campo vetorial e é feito com o auxílio de linhas de corrente, trajetórias e filetes.

Linhas de corrente

Na Figura 8.1 um elemento fluido animado de velocidade \vec{v}_A sai do ponto A percorrendo a distância $\vec{v}_A \delta t$ até o ponto B no intervalo de tempo δt . Neste ínterim, o elemento que ocupava a posição B percorreu a distância $\vec{v}_B \delta t$ até o ponto C e o elemento que estava em C foi para D percorrendo o trecho $\vec{v}_C \delta t$ e assim por diante. Se o intervalo de tempo δt é suficientemente curto, os pontos A, B, C, D, \dots podem ser ligados por uma curva contínua que é chamada de linha de corrente.

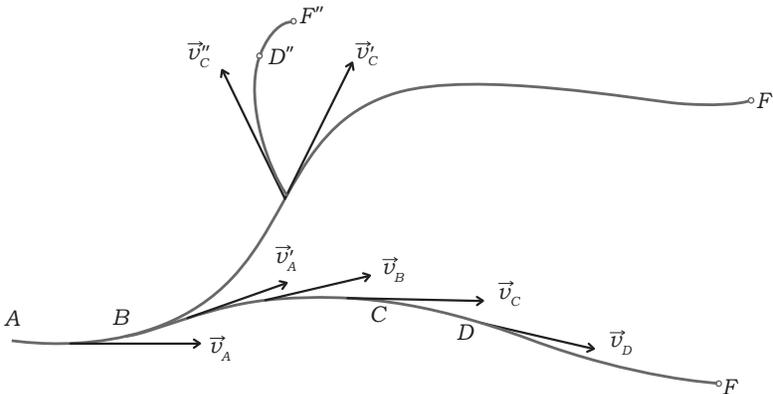


Figura 8.1

Vemos então que a linha de corrente é uma linha que mostra a direção de um número de elementos fluidos no mesmo pequeno intervalo de tempo. É, portanto, uma linha tangente aos vetores velocidades em todos os seus pontos. Como consequência desta definição podemos dizer que duas ou mais linhas de corrente não podem

se tocar porque dois ou mais elementos fluidos não podem ocupar o mesmo lugar no contínuo ao mesmo tempo.

Trajetoária

A trajetória é o traço feito por um único elemento do fluido em movimento durante uma sequência de intervalos de tempo suficientemente curtos para que a curva seja contínua, i.e., não apresente inflexões bruscas.

Comparação entre linha de corrente e trajetória

Fixemos a atenção sobre o elemento que, partindo de A , caminhou até B no tempo δt , como ilustrado na Figura 8.1. Se o escoamento é transiente, no intervalo seguinte a velocidade \vec{v}_B pode variar em módulo e direção, fazendo com que o elemento se dirija para C' com a velocidade \vec{v}'_B . Deste modo, o elemento passa a fazer parte de uma outra linha de corrente BF' . Em seguida, este elemento, animado de velocidade \vec{v}''_C se dirige para D'' em outra linha de corrente, e assim por diante. A linha $ABC'D''$ representa a trajetória de um elemento fluido durante uma sequência de curtos intervalos de tempos. As linhas AF , AF' , AF'' representam linhas de corrente, i.e., são as linhas que indicam, em um dado instante, a direção do escoamento de diversas partículas fluidas. É somente no caso de escoamento permanente que se confundem linhas de corrente e de trajetória, pois é só neste caso que, em qualquer ponto do contínuo, o vetor \vec{v} independe do tempo.

Tubo de corrente

O tubo de corrente é um feixe de linhas de corrente cujo contorno envoltório é formado por linhas deste mesmo tipo que passam por todos os pontos de uma curva fechada, traçada no fluido em um dado instante. Se o escoamento é permanente, o tubo de corrente é também um tubo de trajetórias. De acordo com a definição de linha de corrente, é claro que não pode ocorrer escoamento transversal a um tubo de corrente e toda a vazão de fluido que passa pela seção limitada pela curva original deve necessariamente passar por qualquer outra seção do mesmo tubo de corrente instantâneo ou, em qualquer instante, se o escoamento é permanente (Fig. 8.2).

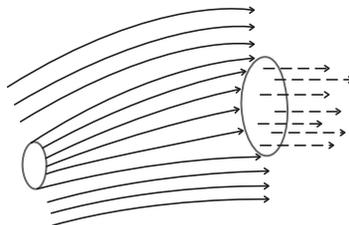


Figura 8.2

Filetes

Filetes ou linhas de emissão são linhas que dão a posição instantânea dos vários elementos de fluido que passaram ou passarão por um dado ponto contínuo. Desprezando os efeitos do vento e do calor irradiado pela chaminé, a fotografia instantânea de uma linha de fumaça que sai de uma chaminé é um exemplo de filete. No escoamento permanente confundem-se filetes, trajetórias e linhas de corrente. Portanto, neste caso, as linhas de corrente podem ser vistas introduzindo-se filetes coloridos em diversos pontos do fluido em escoamento como, por exemplo, se faz na experiência de Reynolds para distinguir o escoamento laminar do turbulento.

Equação da linha de corrente

Consideremos um escoamento bidimensional no plano x, y (Fig. 8.3) onde s representa uma linha de corrente instantânea. Se o escoamento é bidimensional no plano x, y , a velocidade não varia na direção z de modo que as configurações das linhas de corrente em planos paralelos ao da figura são idênticas.

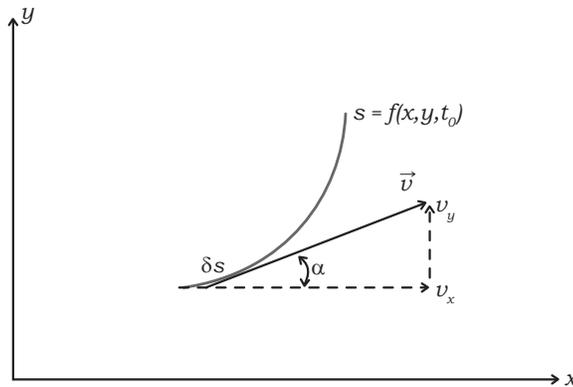


Figura 8.3

Como a linha de corrente é sempre tangente ao vetor velocidade em todos os seus pontos, teremos as seguintes expressões cartesianas de linha de corrente $s = f(x, y, t_0)$ em um dado instante t_0 do escoamento transiente ou durante todo o tempo do escoamento permanente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.1)$$

Nesta expressão, no limite, dx e dy representam as projeções do elemento δs da linha de corrente instantânea s . A equação (8.1) pode ser expressa por

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{ds}{v}. \quad (8.2)$$

Nesta expressão, v é o módulo do vetor velocidade paralelo ao elemento infinitesimal ds , que é dado por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \quad (8.3)$$

A equação da linha de corrente também pode ser expressa por

$$v_x dy - v_y dx = 0. \quad (8.4)$$

No caso de escoamento tridimensional, a equação cartesiana da linha de corrente pode ser obtida das relações

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{ds}{v}, \quad (8.5)$$

onde v é o módulo do vetor \vec{v} dado por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (8.6)$$

Um caso simples de escoamento tridimensional é o *escoamento axissimétrico*, no qual as configurações são idênticas em todos os planos que contêm o eixo de simetria (Figs. 8.5 e 8.6).

Forma vetorial

A forma vetorial da equação da linha de corrente instantânea é dada pelo produto vetorial nulo

$$d\vec{r} \times \vec{v} = 0, \quad (8.7)$$

onde \vec{v} é o vetor posição conforme mostra a Figura 8.4.

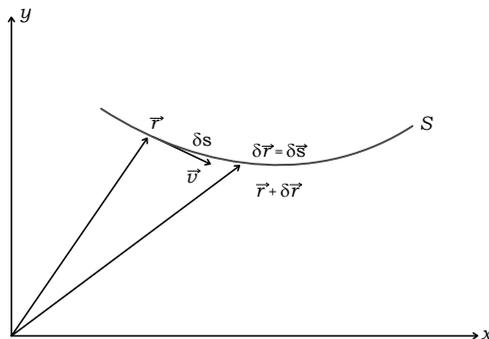


Figura 8.4

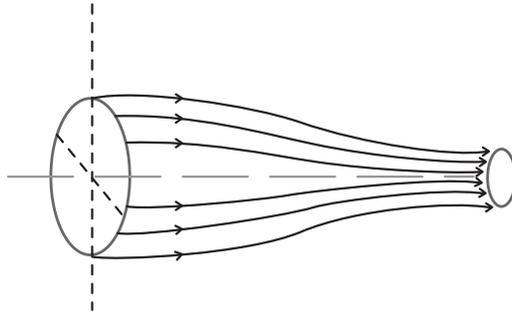


Figura 8.5

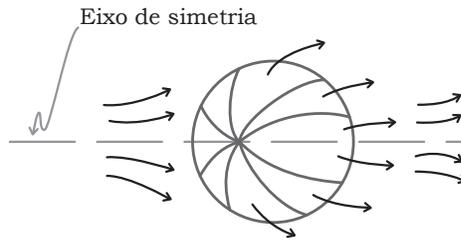


Figura 8.6

Referências

VALENTINE, H.R. *Applied Hydrodynamics*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 1, 1959.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 5, 1934.

FRANKLIN, N.L.; CASE, E.H. *Chemical Engineering Practice*. In: CREMER, H.M.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

Aplicação da equação da continuidade ao tubo de corrente

Forma integral

Em muitos casos a vazão entra e sai em trechos diferentes da área da superfície de um volume de controle. Tal é o caso de um tubo de corrente (Fig. 9.1) onde S_1 é a área de entrada e S_2 a de saída, enquanto o restante da superfície envoltória não se constitui em área de escoamento pela própria definição de tubo de corrente. Assim sendo a equação (7.1), que exprime o valor de saída-entrada, é dada por

$$\int_S \rho v \cos \alpha dS = \int_{S_2} \rho_2 v_2 \cos \alpha_2 dS_2 - \int_{S_1} \rho_1 v_1 \cos \alpha_1 dS_1. \quad (9.1)$$

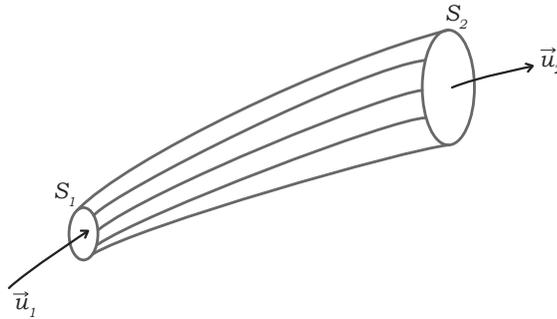


Figura 9.1

Admitindo que a massa específica e a velocidade são uniformes nas seções S_1 e S_2 , teremos,

$$\int_S \rho v \cos \alpha dS = \rho_2 u_2 \cos \alpha_2 S_2 - \rho_1 u_1 \cos \alpha_1 S_1, \quad (9.2)$$

onde usamos o símbolo u para representar a velocidade do escoamento considerado como unidimensional (ou unidirecional) nas seções S_1 e S_2 (diz-se que o escoamento é uniforme nessas seções). Se as seções são, além disso, normais às direções das velocidades \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , $\cos \alpha = 1$ e,

$$\int_S \rho v \cos \alpha dS = \rho_2 u_2 S_2 - \rho_1 u_1 S_1. \quad (9.3)$$

Deste modo, se o escoamento é permanente, incompressível e homogêneo, a equação (7.5) mostra que

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 = Q = \mathcal{C}^{te}. \quad (9.4)$$

Equação da continuidade em coordenadas naturais

Os eixos coordenados naturais são eixos referidos às linhas de corrente do escoamento (Fig. 9.2). O eixo s é sempre tangente à linha de corrente do escoamento e tem a sua direção orientada na direção do escoamento; o eixo n é sempre normal à linha de corrente e está orientado na direção do centro de curvatura. O terceiro eixo, m , é normal ao plano s, n e tem direção positiva orientada pela “regra da mão direita”.

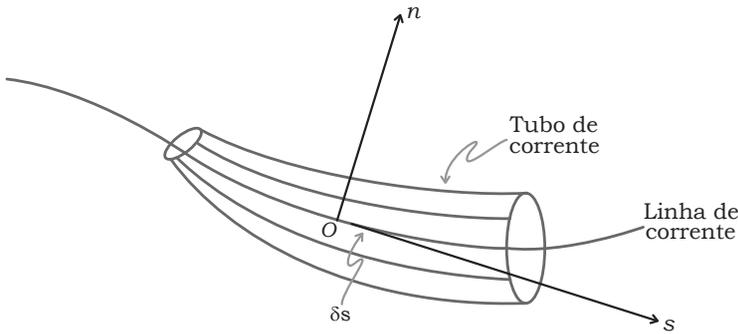


Figura 9.2

A equação da continuidade pode ser deduzida com o auxílio das coordenadas naturais s, n, m . Admitimos que a linha de corrente da Figura 9.2 faz parte de um tubo de corrente cuja seção S varia ao longo de s mas onde a velocidade é sempre uniforme, i.e., $v = u$. Neste caso, a massa que entra menos a que sai é dada por

$$\rho S u \delta t - \left[\rho S u + \frac{\partial(\rho S u)}{\partial s} \delta s \right] \delta t = - \frac{\partial(\rho S u)}{\partial s} \delta s \delta t, \quad (9.5)$$

enquanto a massa acumulada no intervalo de tempo δt é expressa por

$$\text{massa acumulada} = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} \delta s \delta t. \quad (9.6)$$

Na ausência de fonte e de sumidouro, igualamos estas duas últimas expressões para termos

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S u)}{\partial s} = 0. \quad (9.7)$$

No caso de escoamento incompressível de fluido homogêneo,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial S}{\partial s} = 0. \quad (9.8)$$

Se, além disso, o escoamento é permanente

$$\frac{\partial(uS)}{\partial s} = S \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial S}{\partial s} = 0, \quad (9.9)$$

ou seja, como mostrou a equação (9.4), $uS = Q = C^{te}$.

Aplicação do tubo de corrente para determinação da velocidade

As linhas de contorno de um tubo de corrente de um escoamento permanente (tubo de trajetórias ou tubo de filetes) podem ser empregadas para determinar a velocidade, em módulo e direção, em qualquer ponto do escoamento, desde que se conheça a velocidade em um dado ponto.

Admitindo que a curva fechada que gera o tubo de corrente é suficientemente pequena, podemos admitir que a velocidade do fluido através da área limitada por esta curva é constante em módulo e direção, i.e., através desta pequena área o escoamento pode ser considerado uniforme (Fig. 9.1). Neste caso, conhecendo-se a velocidade u_1 através de S_1 podemos determinar u_2 também uniforme na seção S_2 qualquer, do tubo de corrente que passa por S_1 , pela aplicação da equação (9.4), i.e., o módulo de u_2 é dado por $u_1(S_1/S_2)$. A direção de u_2 é dada pelo contorno do tubo de corrente porque o vetor velocidade é sempre tangente às linhas de corrente.

Na Figura 9.3 mostramos a determinação do campo de velocidade em torno de um perfil aerodinâmico a partir da distribuição uniforme conhecida a montante do perfil. Se tomarmos este perfil como muito extenso na direção perpendicular ao plano da figura, poderemos considerar esse escoamento como bidimensional.

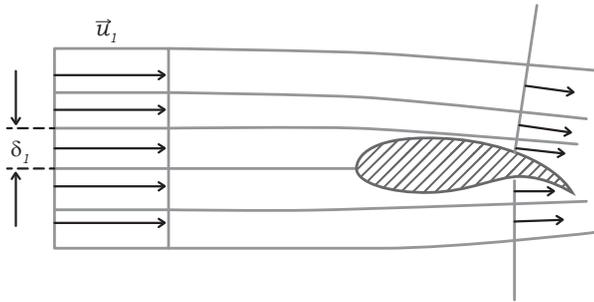


Figura 9.3

O escoamento bidimensional é cabalmente representado por uma configuração plana e o módulo da velocidade em qualquer ponto de um tubo de corrente pode ser calculado por

$$u_2 = u_1(\delta_1/\delta_2), \quad (9.10)$$

onde δ representa a distância entre as linhas de corrente adjacentes.

A vazão volumétrica no escoamento bidimensional é expressa por

$$Q_\delta = u\delta, \quad (9.11)$$

e deve ser considerada como representando volume por unidade de comprimento perpendicular ao plano da configuração, por unidade de tempo.

Características cinemáticas de um escoamento

1. Como a linha de corrente é tangente ao vetor velocidade em todos os seus pontos, não há componente normal e não pode haver escoamento através de uma linha de corrente.
2. A distância entre as linhas de corrente varia inversamente com a velocidade, de modo que uma pequena distância indica alta velocidade e, ao contrário, um espaçamento maior indica baixa velocidade (Fig. 9.3). Quando as linhas de corrente convergem na direção do escoamento, há uma aceleração convectiva, i.e., um aumento de velocidade na direção do escoamento.
3. As superfícies sólidas em contato com fluidos em escoamento podem ser consideradas como superfícies de corrente, pois o escoamento é sempre tangente a essa superfície; portanto, o traço da superfície sólida ao plano da configuração bidimensional ou axissimétrica é uma linha de corrente.
4. As linhas de corrente não podem se cruzar, a não ser nos chamados pontos singulares, i.e., pontos de estagnação, onde a velocidade é nula, tal como o ponto E na Figura 9.6b ou, em fontes ou sumidouros (Figs. 9.4a e 9.4b).
5. Um ponto no escoamento onde a direção da linha de corrente limite varia abruptamente é um ponto singular; este ponto será de estagnação se o ângulo que inclui o fluido for menor do que 180° e de velocidade infinita se maior que 180° . Na Figura 9.5 mostramos a variação da velocidade uniforme u ao longo de eixos perpendiculares à linha de corrente limite. B é um ponto de estagnação ($u/u_0 = 0$) e C é um ponto no qual a velocidade é infinita ($u/u_0 = \infty$).
6. No escoamento permanente a configuração do escoamento não varia com o tempo, ao passo que no escoamento transiente com uma superfície livre ou com um contorno móvel externo ou interno, a configuração em relação a um observador fixo varia com o tempo. Quando o escoamento entre paredes sólidas fixas é transiente porque a vazão total varia, a configuração geral do escoamento permanece inalterada, por mais que a vazão em cada tubo de corrente varie, acarretando a variação do módulo da velocidade em cada ponto.
7. Alguns casos de configurações de escoamento transiente que resultam do movimento de um contorno de corpo sólido ou de superfície livre, com velocidades constantes em relação a um observador, podem ser transformados em configurações permanentes pela superposição de uma configuração de velocidade constante, de mesmo módulo, mas direção oposta à do movimento do contorno. O contorno é levado ao repouso em relação ao observador quando este se move com velocidade de mesmo módulo e direção que o contorno. Deste modo, alteramos a configuração e eliminamos as acelerações locais, simplificando o estudo do escoamento (Fig. 9.6).

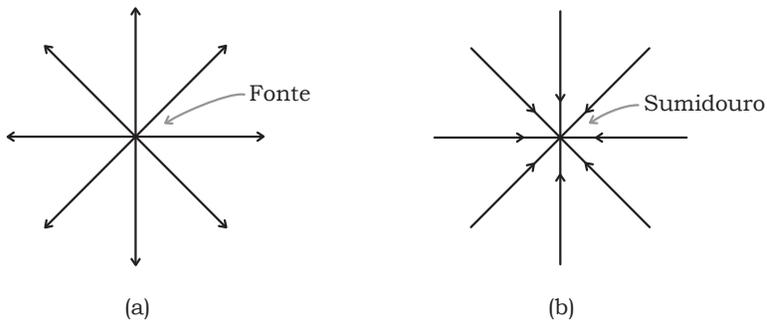


Figura 9.4

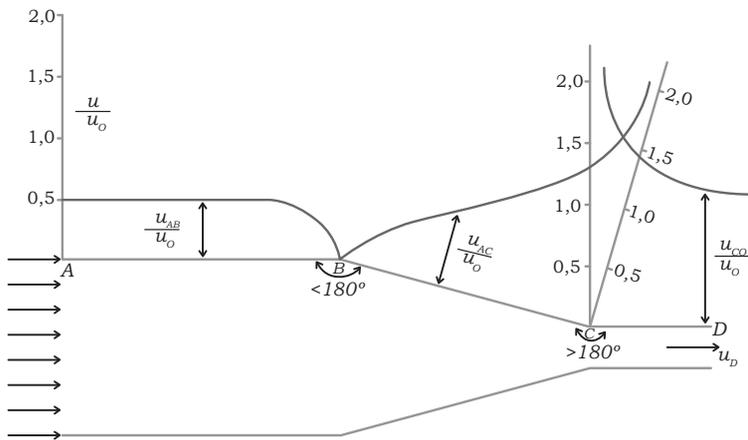


Figura 9.5

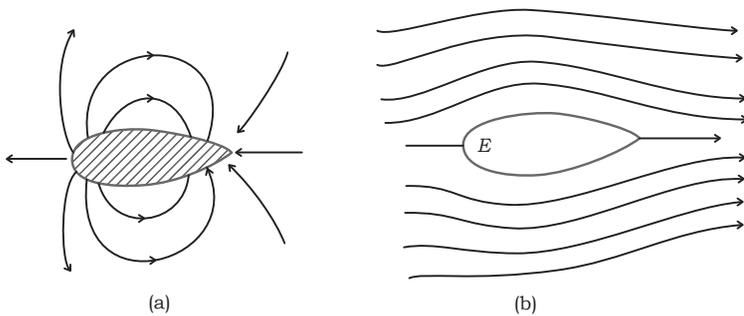


Figura 9.6

No caso de configurações transientes, tal como a configuração instantânea que se apresenta a um observador fixo por causa do movimento de um corpo sólido submerso em um fluido (Fig. 9.6a), o contorno do corpo não pode ser considerado como uma

linha de corrente. Na Figura 9.6b o observador move-se com a velocidade do corpo sólido, a configuração é permanente e o contorno é uma linha de corrente; neste caso, se o corpo está fixo, o observador também está. A configuração da Figura 9.6b também é obtida superpondo-se ao movimento do corpo o movimento contrário ao do fluido.

Referências

VALLENTINE, H.R. *Applied Hydrodynamics*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 1, 1959.

TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulica*, Editora Globo, Capítulo 5, 1960.

Estudo da aceleração

A aceleração de um elemento fluido é a taxa de variação do seu vetor velocidade. Existem dois métodos para estudar o movimento em geral ou, no caso, a variação da velocidade. O primeiro é o *método de Euler*, que estuda a aceleração dos elementos que passam por um ponto fixo no espaço. O segundo é o *método de Lagrange*, que acompanha os elementos nas suas trajetórias para estudar as acelerações que eles sofrem. Neste método, as coordenadas x, y, z de um elemento são variáveis que dependem da posição inicial do elemento no tempo. Enquanto o método de Euler estuda a variação de velocidade em certos pontos, o método de Lagrange segue a variação de velocidade de certos elementos do fluido. A equação da continuidade para um elemento fixo do fluido foi deduzida pelo método de Euler, enquanto a do elemento móvel seguiu o método de Lagrange.

Segundo o método de Euler, a velocidade de um fluido é função da posição e do tempo, i.e.,

$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{r}, t). \quad (10.1)$$

Os componentes cartesianos de \vec{v} são então

$$v_x = f_x(x, y, z, t), \quad (10.2)$$

$$v_y = f_y(x, y, z, t), \quad (10.3)$$

$$v_z = f_z(x, y, z, t). \quad (10.4)$$

No método de Lagrange o vetor \vec{r} que representa a posição de um dado elemento em qualquer instante é expresso por

$$\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_0, t), \quad (10.5)$$

onde \vec{r}_0 é o vetor posição que identifica o elemento em um certo instante inicial arbitrário t_0 , i.e., cada partícula do contínuo tem um valor de \vec{r}_0 que é retido durante o escoamento, ou seja, \vec{r}_0 é o *nome* do elemento. Os componentes cartesianos da posição dos elementos são dados por

$$x = F_x(x_0, y_0, z_0, t), \quad (10.6)$$

$$y = F_y(x_0, y_0, z_0, t), \quad (10.7)$$

$$z = F_z(x_0, y_0, z_0, t). \quad (10.8)$$

Embora no método de Euler a descrição do movimento seja feita com a atenção focalizada em um ponto do espaço e não em um elemento, é necessário acompanhar os elementos fluidos pelo menos durante um certo intervalo de tempo δt , porque as leis da mecânica aplicam-se aos elementos e não aos pontos do espaço.

Expressão da aceleração em coordenadas cartesianas fixas

Variações da velocidade \vec{v} são acompanhadas de variações nos componentes v_x, v_y, v_z . De acordo com o método de Euler, considerando a variação do componente v_x (eq. (10.2)), temos

$$\delta v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} \delta t + \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \delta z, \quad (10.9)$$

i.e., a variação δv_x é igual à soma da variação local $(\partial v_x / \partial t) \delta t$ com a variação convectiva devido às variações $\delta x, \delta y$ e δz da posição (x, y, z) no intervalo de tempo.

Na Figura 10.1 vemos os componentes convectivos da variação do componente v_x de velocidade quando um elemento situado no ponto (x, y, z) desloca-se para o ponto $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ no intervalo de tempo δt durante o qual estudamos a variação da velocidade \vec{v} para $\vec{v} + \delta \vec{v}$.

Dividindo ambos os membros da equação (10.9) por δt temos

$$\frac{\delta v_x}{\delta t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t}, \quad (10.10)$$

onde $\delta x, \delta y, \delta z$ não são incrementos arbitrários mas representam os componentes de distância percorrida pelo elemento no incremento de tempo δt . Tomando os limites quando δt tende para zero e usando a representação de derivada substantiva, temos

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z. \quad (10.11)$$

Considerando a variação dos componentes v_y e v_z da velocidade \vec{v} , chega-se por processo semelhante às expressões

$$a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z, \quad (10.12)$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z. \quad (10.13)$$

Nessas expressões os termos $\partial v_x / \partial t, \partial v_y / \partial t$ e $\partial v_z / \partial t$ representam as acelerações locais, i.e., as variações dos componentes da velocidade com o tempo no ponto

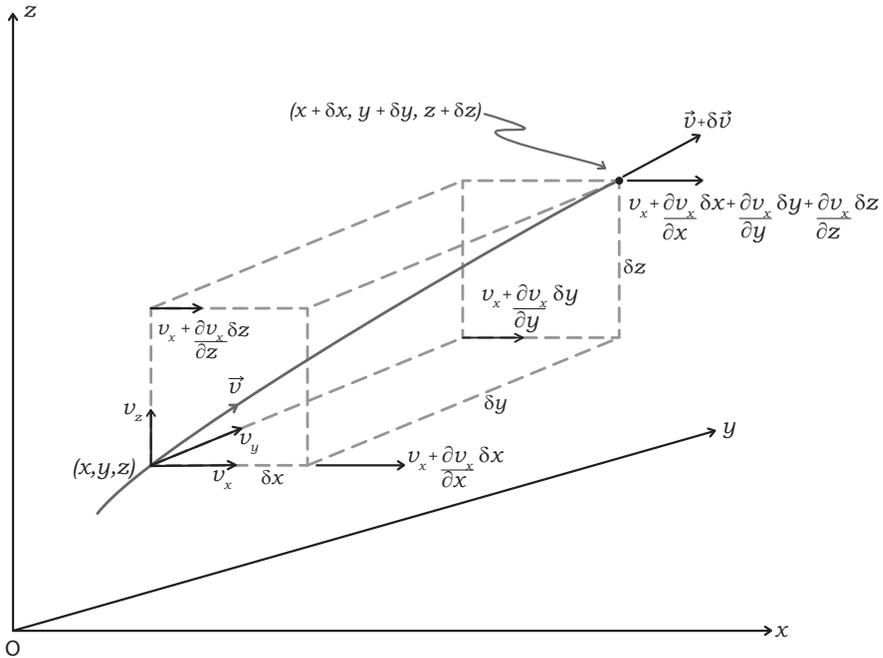


Figura 10.1

(x, y, z) , enquanto os termos restantes do segundo membro representam a aceleração convectiva relacionada com a variação de velocidade devido à posição.

No caso de *escoamento permanente* a aceleração local é nula, entretanto, a aceleração convectiva pode ser finita, como no caso em que o fluido escoar por um tubo de corrente de seção variável na direção do escoamento. No caso de *escoamento uniforme* a aceleração convectiva é nula, mas se o escoamento é transiente, a aceleração local é finita. As expressões dos componentes da aceleração \vec{a} mostram que a derivada substantiva é a soma da derivada local com a derivada convectiva.

O *escoamento é dito uniforme* quando as variáveis que o afetam permanecem constantes com a variação da posição na direção do escoamento. Usualmente a pressão não é incluída nesta restrição, que se refere à velocidade, massa específica, temperatura etc. Chamando de s a direção do escoamento, se ele é uniforme, $\partial \vec{v} / \partial s$, por exemplo, é nulo.

Expressões das acelerações em coordenadas naturais

Estudaremos a variação da velocidade \vec{v} em um dado ponto O de uma linha de corrente instantânea L e, para isso, tomemos o ponto O como origem do sistema de coordenadas naturais (Fig. 10.2).

Nas coordenadas naturais o eixo s é tomado na direção do escoamento, sendo tangente ao ponto O da linha de corrente instantânea. O eixo n é dirigido para o centro

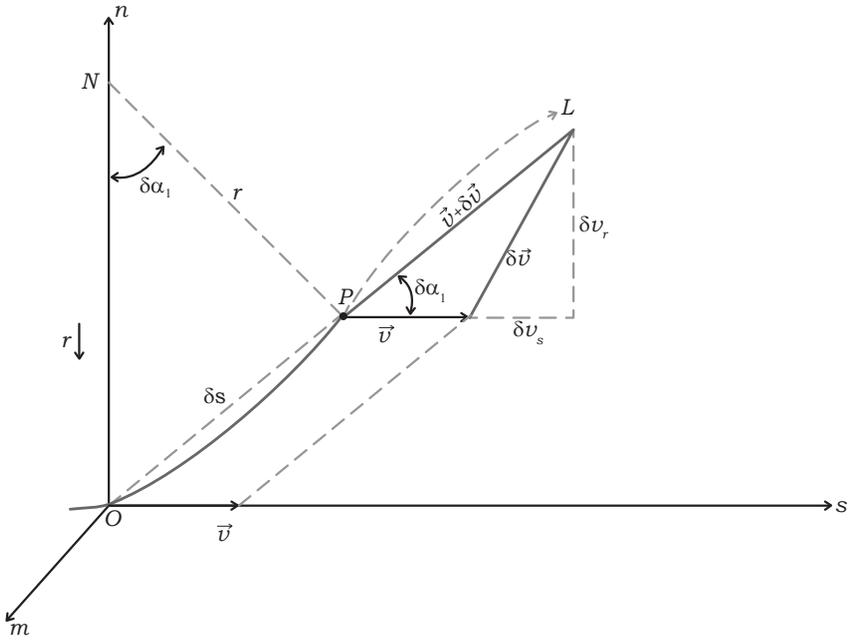


Figura 10.2

da curvatura da curva no ponto O . O pequeno trecho δs da linha de corrente pode ser incluído no plano s, n . O terceiro eixo m é normal a este plano.

A velocidade \vec{v} varia em módulo e direção para $\vec{v} + \delta\vec{v}$ no trecho $OP = \delta s$ percorrido no intervalo de tempo δt . A variação da velocidade \vec{v} pode ser acompanhada a partir da variação dos componentes v_s, v_n e v_m que dependem da posição e do tempo, i.e.,

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial m} \frac{dm}{dt} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \frac{dn}{dt}, \quad (10.14)$$

$$a_m = \frac{dv_m}{dt} = \frac{\partial v_m}{\partial t} + \frac{\partial v_m}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_m}{\partial m} \frac{dm}{dt} + \frac{\partial v_m}{\partial n} \frac{dn}{dt}, \quad (10.15)$$

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial m} \frac{dm}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial n} \frac{dn}{dt}. \quad (10.16)$$

Entretanto, como δs está situado neste instante no plano (s, n) , dn/dt e dm/dt são nulos e a razão de variação $\partial v_m / \partial s$ também o é. Portanto, levando em conta que $ds/dt = v$ (módulo de \vec{v}), temos

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} v, \quad (10.17)$$

$$a_m = \frac{\partial v_m}{\partial t}, \quad (10.18)$$

$$a_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s} v. \quad (10.19)$$

Vemos que o deslocamento está incluído no plano (s, n) mas, v_m pode variar no ponto O com o tempo enquanto v_s e v_n podem variar com a posição e com o tempo. As variações com o tempo (no ponto O) ocorrem quando o escoamento é transiente.

Na Figura 10.2 vemos que o incremento de v_n de O a P é dado por

$$\delta v_r = 0 + \frac{\partial v_n}{\partial s} \delta s = (v + \delta v) \text{sen } \delta \alpha_1, \quad (10.20)$$

onde, chamando de r o raio de curvatura da linha de corrente no ponto O , $\text{sen } \delta \alpha_1 = \delta \alpha_1 = \delta s/r$, portanto, desprezando o infinitésimo de segunda ordem, temos:

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} = \frac{v_r}{r}. \quad (10.21)$$

O incremento de v_s , por sua vez, é expresso por $\delta v_s = (v + \delta v) \cos \delta \alpha_1 - v$ ou, como $\cos \delta \alpha_1 = 1$, $\delta v_s = \delta v$. Derivando em relação a s , temos

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s}. \quad (10.22)$$

Segue-se que os componentes da aceleração \vec{a} são

$$a_s = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s}, \quad (10.23)$$

$$a_m = \frac{\partial v_m}{\partial t}, \quad (10.24)$$

$$a_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{v^2}{r}. \quad (10.25)$$

Esta última equação expressa que a aceleração total na direção do centro de curvatura N consiste da aceleração local $\partial v_n / \partial t$ e da aceleração convectiva (*aceleração centrípeta*) v^2/r .

Referências

VALLENTINE, H.R. *Applied Hydrodynamics*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 1, 1959.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons, Capítulo 18, 1960.

BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dossat, Capítulo 8, 1960.

Equação de Euler

A equação de Euler resulta da aplicação da segunda lei de Newton ao escoamento ideal. No escoamento ideal atuam nos elementos do fluido as mesmas forças que no fluido em repouso, i.e., as forças de pressão e as de gravidade. Portanto, as equações diferenciais do fluido em repouso, (3.12) a (3.14), podem ser consideradas como expressões da equação de Euler.

No problema geral do escoamento ideal, temos que calcular os componentes cartesianos v_x , v_y e v_z , a pressão P e a massa específica ρ em todos os pontos do contínuo. Para isso, substituímos as expressões (10.11) e (10.12) da aceleração nas equações (3.12) a (3.14) resultando nas *equações de Euler em coordenadas cartesianas fixas*:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho gh), \quad (11.1)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho gh), \quad (11.2)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho gh). \quad (11.3)$$

Equações de Euler em coordenadas cilíndricas

As equações (11.1) a (11.3) podem ser expressas em coordenadas cilíndricas r, ψ, x (Fig. 7.2) do seguinte modo:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_\psi^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (P + \rho gh), \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_r v_\psi}{r} + v_x \frac{\partial v_\psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \psi} - gh, \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho gh). \quad (11.6)$$

Expressões vetoriais da equação de Euler

As equações (11.1) a (11.3) representam os componentes cartesianos da equação vetorial

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P + \rho gh), \quad (11.7)$$

onde $(\vec{v} \cdot \text{grad})$ pode ser considerado como um operador definido pela equação (6.26). A equação (11.7) pode também ser expressa por

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_g - \frac{1}{\rho} \text{grad} P, \quad (11.8)$$

onde o vetor \vec{F}_g , força da gravidade por unidade de massa, pode ser expresso pelo gradiente do potencial Ω (eq. (5.22)), i.e.,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{grad} \Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad} P. \quad (11.9)$$

Levando em conta que

$$(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}, \quad (11.10)$$

podemos escrever a equação de Euler do seguinte modo:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \text{grad} \Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad} P. \quad (11.11)$$

Equação de Euler em coordenadas naturais

Os componentes naturais da aceleração em um ponto de uma linha de corrente instantânea são dados pelas equações (10.23) a (10.25). Fazendo a correspondência dos eixos cartesianos fixos arbitrariamente x, y, z com os eixos naturais s, m, n e igualando os componentes da aceleração aos componentes da força resultante, temos:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (P + \rho gh), \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (P + \rho gh), \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial m} (P + \rho gh). \quad (11.14)$$

Essas equações representam os componentes naturais da equação de Euler e aplicam-se em todos os pontos de uma linha de corrente instantânea do escoamento ideal. No caso de escoamento incompressível e homogêneo, a ser considerado doravante, a equação (11.12) pode ser expressa por

$$\rho \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho gh \right) = 0. \quad (11.15)$$

Se a linha de corrente situa-se sempre no plano (s, n) , i.e., se o escoamento é plano (bidimensional), além de permanente, as equações de Euler reduzem-se a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho gh \right) = 0, \quad (11.16)$$

$$\frac{v^2}{r} + \frac{\partial}{\partial n} (P + \rho gh) = 0. \quad (11.17)$$

Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente

No escoamento permanente ao longo de uma linha de corrente (escoamento unidimensional), temos que considerar somente o componente s das equações de Euler em coordenadas naturais. Neste caso, a equação (11.15) reduz-se a

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + h \right) = 0. \quad (11.18)$$

A equação acima implica que

$$\frac{v^2}{2g} + h + \frac{P}{\rho g} = H(t), \quad (11.19)$$

que é a *equação de Bernoulli*. No caso de escoamento compressível ou heterogêneo é necessário conhecer $\rho = \rho(P, T)$ para se obter a forma equivalente da equação (11.19).

A integração da equação (11.18) para fornecer a equação (11.19) foi efetuada em relação ao espaço, por isso, a constante é, em geral, função do tempo, apesar do escoamento ser permanente. Podemos, por exemplo, variar o valor de H variando o valor da pressão externa a que o escoamento esteja sujeito. Na Figura 11.1, a pressão pode ser alterada por movimento do pistão em contato com o fluido em escoamento dentro de um tubo. Se o escoamento é incompressível e o fluido é homogêneo, as alterações de pressão não afetam o valor da massa específica ρ nem o formato das linhas de corrente, mas modificam o valor do termo $P/\rho g$ tornando, portanto, H função de t . A constante será independente do tempo quando não pudermos introduzir influências exteriores no escoamento. Tal é o caso do escoamento sem superfície livre (*escoamento confinado ou forçado*).

A equação (11.19) de Bernoulli, que relaciona a velocidade v com a cota h e a pressão total P , está sujeita às seguintes restrições, que convém relacionar:

1. Escoamento ideal, permanente, incompressível de fluido contínuo e homogêneo.
2. A força de volume que atua é a força da gravidade, que é constante em módulo (g por unidade de massa) e em direção.
3. O trinômio $(v^2/2g) + h + (P/\rho g)$ é constante ao longo de uma linha de corrente mas essa constante pode variar com o tempo.

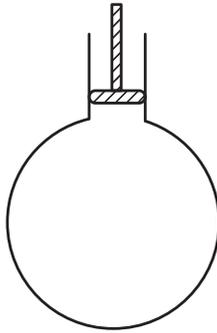


Figura 11.1

Referências

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulos 2 e 10, 1934.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 4, 1947.

Interpretação energética da equação de Bernoulli

Na equação (11.19) cada termo tem as dimensões de energia por unidade de peso do fluido em escoamento, ou seja, dimensões de *carga ponderal* (comprimento).

Assim temos

- $v^2/2g$ energia cinética por unidade de peso, i.e., *carga cinética* ou *taquicarga*,
- h energia potencial em relação a uma cota referência, por unidade de peso do fluido ou, *carga potencial*,
- $P/\rho g$ energia de pressão por unidade de peso ou *carga de pressão*,
- H *carga total*.

Em um dado instante, tomando dois pontos 1, 2 (Fig. 12.1) ao longo de uma certa linha de corrente, como a carga total H é constante, temos:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2. \quad (12.1)$$

Os termos $P/\rho g$ dessa equação não representam por si só um conteúdo de energia, pois o escoamento é incompressível e, conseqüentemente, o fluido não é elástico. A diferença entre $P_1/\rho g$ e $P_2/\rho g$ pode ser encarada, entretanto, como equivalente ao produto das forças de pressão pelo deslocamento que sofre a unidade de peso do fluido para ir de 1 a 2. A equação (12.1) pode ser interpretada graficamente como na Figura 12.1, onde os comprimentos representam as três formas de energia por unidade de peso ao longo da linha de corrente L de um tubo de corrente.

O trinômio de Bernoulli diz que a linha de carga total é sempre horizontal, no entanto, a linha piezométrica pode subir ou descer na direção do escoamento conforme os valores das cotas e das cargas de pressão, que variam independentemente uma da outra.

Conhecido o traçado de uma linha de corrente do escoamento permanente, ideal e incompressível e também a velocidade e a pressão em um ponto desta linha podemos, com o auxílio da equação (9.4) da continuidade, determinar a velocidade e, com a equação (12.1), a pressão nos outros pontos da mesma linha de corrente.

Em geral, não só em um dado instante, a carga total H varia de linha de corrente para linha de corrente do tubo como também para uma dada linha, H varia com o tempo.

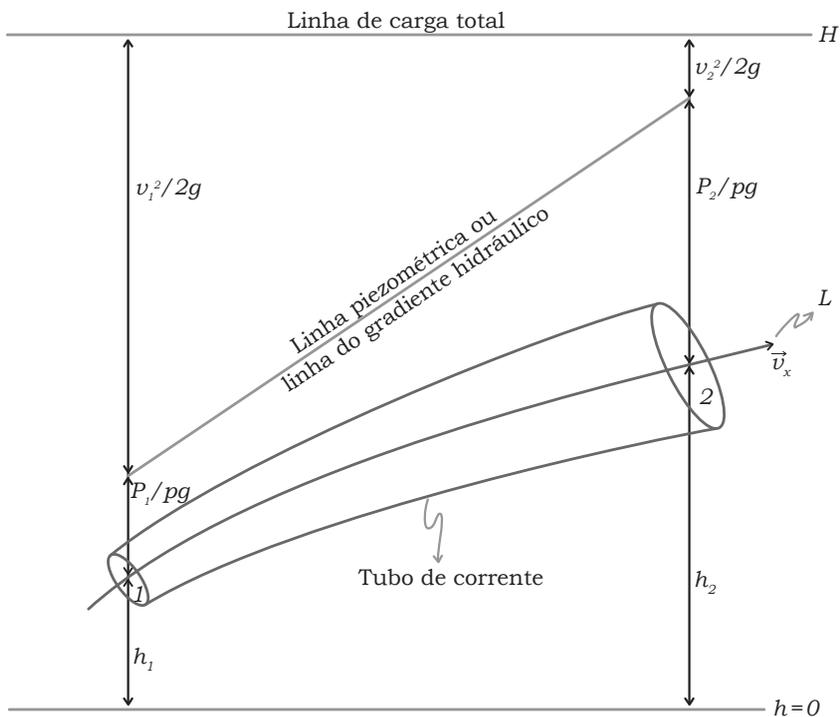


Figura 12.1

Mapeamento das linhas de corrente

No caso do escoamento plano (bidimensional) os principais métodos usados para o mapeamento das linhas de corrente são os seguintes:

1. gráfico de rede de escoamento;
2. análise numérica;
3. analogia experimental;
4. superposição de configurações padrões;
5. transformação conforme.

Os dois últimos métodos são analíticos e o da superposição pode ser usado em certos casos de escoamento tridimensional axissimétrico. Esses métodos de mapeamento são estudados em hidrodinâmica.

Outras expressões da equação de Bernoulli

Multiplicando ambos os membros da equação (11.19) pelo módulo da aceleração da gravidade, resulta:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh = Hg, \quad (12.2)$$

onde os termos têm unidades de energia por unidade de massa.

A equação (11.18) quando integrada ao longo de uma linha de corrente do escoamento permanente e incompressível fornece diretamente a expressão

$$\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho gh = H\rho g, \quad (12.3)$$

onde os termos têm unidades de energia por unidade de volume. Energia por unidade de volume tem a mesma dimensão que pressão.

Omissão da força gravitacional na equação de Bernoulli

Nas equações do movimento P representa a pressão total que atua em cada ponto do fluido em escoamento. Essa pressão pode ser considerada como a soma da pressão que atuaria se o fluido estivesse em repouso com a pressão devida ao movimento do fluido.

Quando se trata de um escoamento confinado, i.e., sem superfícies livres, de um fluido incompressível e homogêneo (ρ constante), a ação da força de campo gravitacional dada pelo peso do fluido é equilibrada pelo empuxo hidrostático em todos os pontos do fluido. Nesse caso, portanto, podemos omitir a atuação da força gravitacional da equação de Bernoulli desde que a pressão passe a representar não mais a pressão total devida ao peso e à ação dinâmica, mas somente a esta última.

Chamando de P' a pressão em repouso e de P'' a pressão de movimento temos, de acordo com $P' = \text{constante} - \rho gh$ dado pela equação (4.6).

$$P = P' + P'' = C^{te} - \rho gh + P''. \quad (12.4)$$

Substituindo esta expressão na equação (12.3) de Bernoulli, resulta:

$$\rho v^2 / 2 + P'' = C^{te}, \quad (12.5)$$

i.e., cancelamos a força de campo levando em conta em P'' somente a pressão dinâmica. Nas aplicações práticas, usualmente nos interessa a diferença de pressão entre dois pontos do escoamento; nesses casos é evidente que $\Delta P = \Delta P''$ de modo que *continuaremos a usar P para representar quer a pressão total quer a pressão devida ao movimento.*

Extensão da equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli na forma (11.19) mostra que a soma das cargas cinéticas, de pressão e potencial é constante em todos os pontos de uma certa linha de corrente desde que o escoamento seja permanente, ideal e incompressível e o fluido seja contínuo e homogêneo e esteja sob a ação de um campo gravitacional. A constante H , carga total, pode ter valores diferentes para diferentes linhas de corrente, entretanto, se o escoamento é irrotacional, H tem o mesmo valor para todas as linhas de corrente e, neste caso, a equação

(12.1) pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer do escoamento, não necessariamente na mesma linha de corrente. O escoamento irrotacional ocorre, por exemplo, quando as linhas de corrente partem de um reservatório líquido, de grandes dimensões, onde as velocidades são tão pequenas que a carga cinética pode ser desprezada e onde, portanto, todas as linhas de corrente têm o mesmo valor de $H = (P_0/\rho g) + h_0$ (Fig. 12.2). A caracterização rigorosa do escoamento irrotacional será considerada a seguir. Começamos recordando a definição da rotação de um elemento rígido para depois considerar a rotação de um elemento fluido.

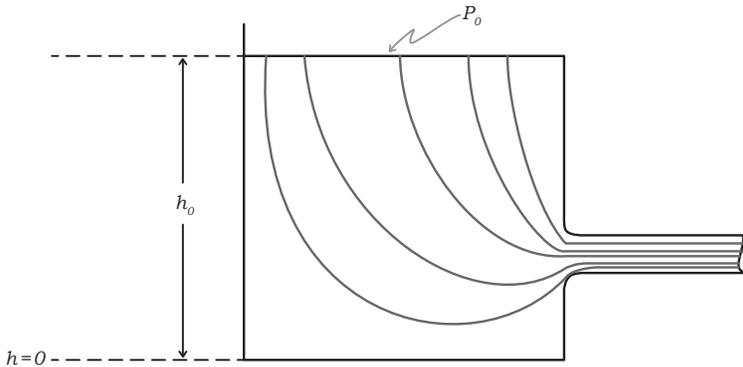


Figura 12.2

Referências

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 9, 1934.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 4, 1947.

Rotação de um elemento rígido

A Figura 13.1 mostra no plano x, y o movimento de translação pura, *movimento irrotacional*, de um *elemento rígido*. Neste caso a posição do elemento pode ser completamente determinada com as três coordenadas do seu centro de massa O' em relação aos eixos cartesianos x, y, z de origem fixa O .

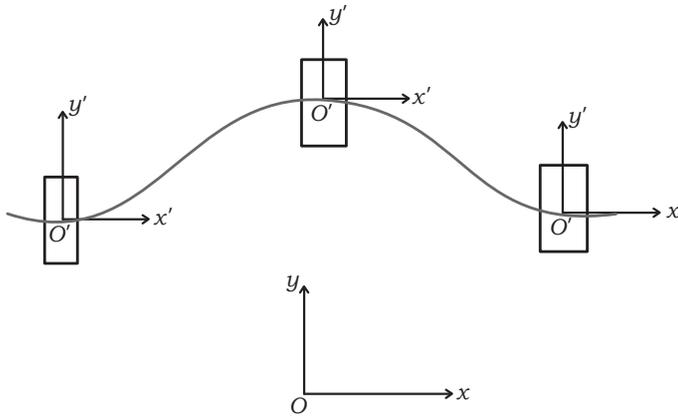


Figura 13.1

No caso geral, de movimento rotacional (Fig. 13.2), a posição do elemento necessita de seis coordenadas para sua localização, i.e., as três coordenadas x, y, z do centro de massa O' e mais três que indiquem como os eixos x', y', z' fixos no elemento, se orientam em relação aos eixos de referência.

Embora o movimento geral do elemento rígido seja uma combinação do movimento de translação com o de rotação, podemos separá-lo em translação pura e rotação pura. Na Figura 13.3 o elemento roda em relação ao eixo fixo z (eixo de rotação) que passa pelo ponto O e é perpendicular ao plano x, y . Podemos usar o ângulo α que o eixo x' fixo no elemento faz com o eixo x para especificar a posição angular do elemento, escolhendo o sentido positivo de rotação como contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio. Chamamos de rotação o vetor velocidade angular do elemento rígido definido por

$$\vec{\omega} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{\alpha}}{\delta t} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \quad (13.1)$$

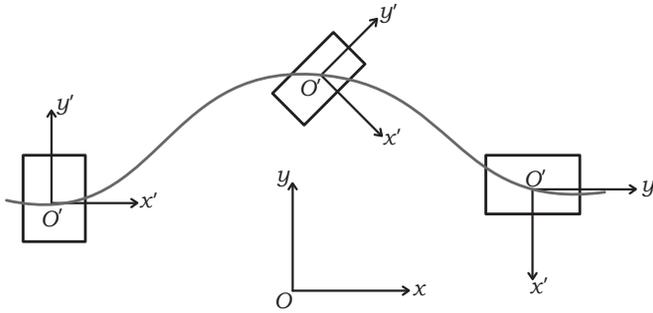


Figura 13.2

cujo módulo é $\omega = d\alpha/dt$, e cujo sentido ao longo do eixo de rotação obedece à regra da mão direita.

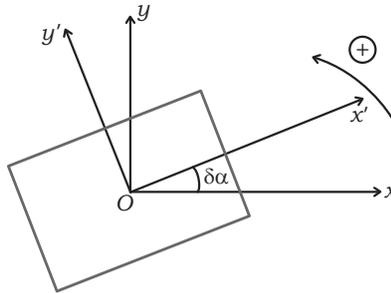


Figura 13.3

O vetor rotação, segundo um eixo qualquer, tem três componentes cartesianos $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. A rotação total do elemento, constituída da soma vetorial dos componentes, tem um módulo dado por

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (13.2)$$

A rotação pode ser considerada como “propriedade” do elemento rígido porque ω é a mesma em relação a qualquer um de seus pontos.

Rotação de um elemento fluido

Enquanto um elemento rígido pode estar sujeito a dois tipos de movimento, o de translação e o de rotação, um elemento fluido em escoamento real pode, além disso, estar sujeito à deformação linear de compressão ou expansão e à deformação angular devida às forças de cisalhamento que atuam no escoamento viscoso.

A Figura 13.4 mostra os quatro tipos de movimento de um elemento fluido em escoamento bidimensional: (a) representa a translação; (b) a expansão; (c) a rotação com

as diagonais sofrendo um certo deslocamento angular e (d) a deformação angular dos lados do elemento provocada pelas tensões viscosas τ_{yx} e τ_{xy} . No tipo (d) as diagonais não sofrem deslocamento angular, i.e., o elemento não sofre rotação.

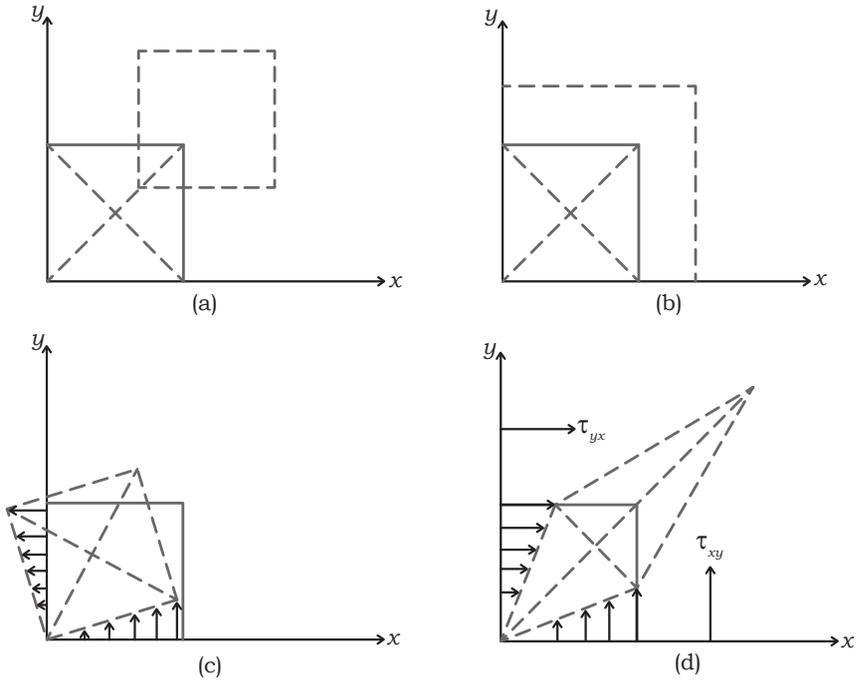


Figura 13.4

No escoamento ideal não ocorrem deformações angulares por causa da ausência de forças viscosas. No escoamento incompressível do fluido homogêneo não ocorrem deformações lineares de expansão ou compressão provocadas pelas forças de pressão.

O escoamento real viscoso é sempre rotacional, enquanto o escoamento ideal pode ser tanto rotacional como irrotacional. Entretanto, o escoamento ideal inicialmente rotacional não pode passar a irrotacional. As forças que agem no centro de gravidade do elemento não podem produzir torque que modifique o estado de rotação do elemento. Como a presença ou ausência de rotação de um fluido ideal não pode ser alterada, podemos considerar a rotação como uma “propriedade” do fluido independente da posição do elemento no contínuo.

Durante o escoamento real ao longo de uma trajetória reta ou curva, o elemento fluido pode sofrer tanto deformação quanto rotação. Definimos a rotação de um elemento fluido plano como a média aritmética das velocidades angulares de dois eixos mutuamente perpendiculares, no plano do escoamento (Fig. 13.5), i.e.,

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \bar{\alpha}_1}{\delta t} + \frac{\delta \bar{\alpha}_2}{\delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\alpha}_1}{dt} + \frac{d\bar{\alpha}_2}{dt} \right). \quad (13.3)$$

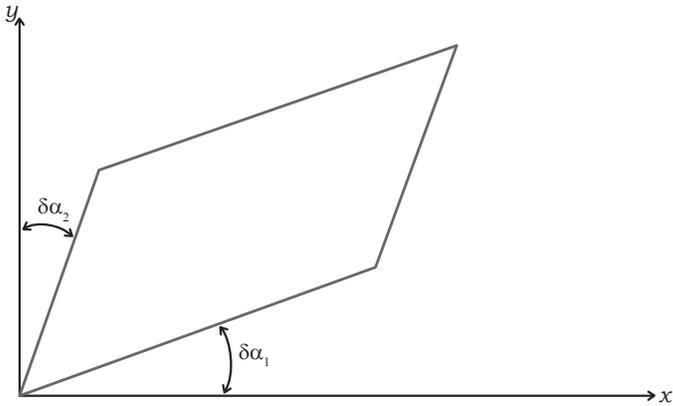


Figura 13.5

O módulo do vetor rotação de um elemento fluido é dado pela equação (13.2) onde os componentes são componentes médios aritméticos.

A Figura 13.6a mostra que o elemento considerado se deforma de tal maneira que a rotação negativa do eixo horizontal é a mesma que a rotação positiva do eixo vertical, portanto, esse escoamento é irrotacional. Por outro lado, na Figura 13.6b, o elemento não se deforma muito, mas os eixos rodam no mesmo sentido negativo e o escoamento é rotacional. Vemos, portanto, que o elemento fluido pode sofrer deformações no escoamento irrotacional. No escoamento ideal convergente, por exemplo (Fig. 13.7), os elementos fluidos sofrem deformações, embora não sofram qualquer rotação no espaço.

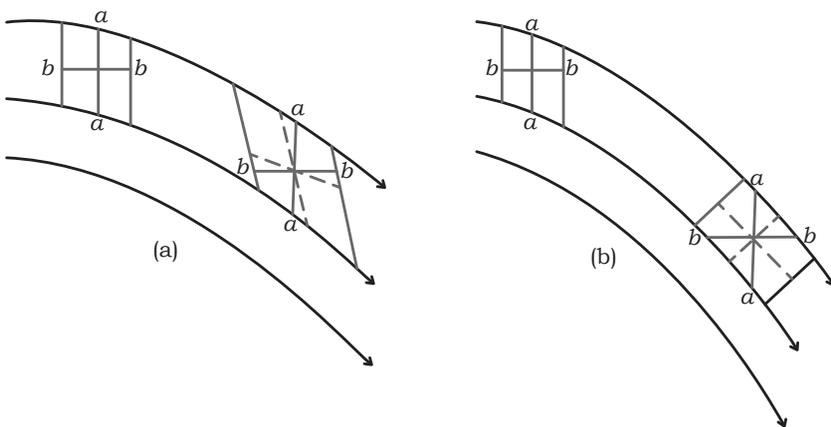


Figura 13.6

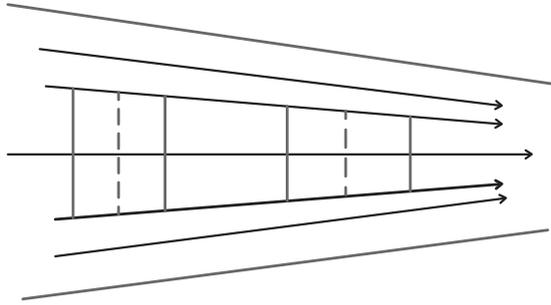


Figura 13.7

Referências

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons, Capítulo 11, 1960.

Escoamento rotacional e irrotacional

Dizemos que o escoamento é irrotacional quando todos os elementos do contínuo têm velocidade angular resultante nula. A caracterização do escoamento rotacional ou irrotacional é importante porque, para este último, a aplicação da equação de Bernoulli pode ser estendida aos tubos de corrente de seção finita.

Escoamento plano ao longo de linhas de correntes

Consideremos inicialmente o escoamento permanente ideal e incompressível ao longo de uma linha de corrente situada no plano s, n de coordenadas naturais (Fig. 10.2). A variação da carga total na direção n perpendicular à linha de corrente pode ser obtida derivando em relação a n a equação (11.19) de Bernoulli, i.e.,

$$\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{dH}{dn}. \quad (14.1)$$

Por outro lado, o componente n da equação de Euler, equação (11.11), pode ser expresso por

$$-\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{v^2}{gr}. \quad (14.2)$$

Portanto, combinando essas duas últimas equações para eliminar as variações de pressão e cota, temos

$$g \frac{dH}{dn} = -\frac{v^2}{r} + v \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (14.3)$$

Como o eixo n é orientado para o centro de curvatura (ponto N na Fig. 10.2), enquanto o eixo r tem orientação contrária, a variação da carga total em relação a r é dada por

$$g \frac{dH}{dr} = \frac{v^2}{r} + v \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (14.4)$$

Neste ponto resta-nos provar que se $(\partial v / \partial n) - (v/r)$ da equação (14.3) ou $(\partial v / \partial r) + (v/r)$ na equação (14.4) são identicamente nulos, o escoamento é irrotacional e portanto a carga total H não varia na direção n (ou r). É o que faremos a seguir.

Na Figura 10.2 a variação de direção do eixo s é dada por

$$\omega_1 = \lim_{\delta t \rightarrow t} \frac{\delta \alpha_1}{\delta t}, \quad (14.5)$$

onde δt é o tempo que o elemento no ponto O animado da velocidade v leva para percorrer a distância δs . Este tempo é dado por $\delta s/v$, portanto, levando em conta também que $\delta \alpha_1 = \delta s/r$, temos

$$\omega_1 = \frac{v}{r}. \quad (14.6)$$

Por sua vez, a variação de direção do eixo n pode ser acompanhada na Figura 14.1 através da rotação que sofre o segmento δn situado entre duas linhas de corrente, i.e.,

$$\omega_2 = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha_2}{\delta t} = -\frac{\partial v}{\partial n}. \quad (14.7)$$

O sinal negativo deve-se ao sentido da rotação do eixo s , que é contrário ao da Figura 10.2. Portanto, exprimindo a rotação como a média das velocidades angulares dos eixos ortogonais s e n , temos

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right). \quad (14.8)$$

Segue-se que, de fato, quando

$$\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (14.9)$$

ou

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (14.10)$$

o escoamento é irrotacional e a carga total H não varia na direção n (ou r). A equação (11.18) mostrou que a carga total também é constante ao longo da direção s da linha de corrente, portanto, no caso de escoamento irrotacional, a equação de Bernoulli, na forma da equação (12.1), pode ser empregada entre os pontos 1 e 2, que não precisam mais estar situados na mesma linha de corrente. O escoamento ideal irrotacional é frequentemente chamado de *escoamento potencial*.

No escoamento real, viscoso, nas proximidades de uma parede, existe sempre um gradiente transversal de velocidade $\partial v/\partial n$ tal como mostra a Figura 14.1. Nesta região, então, mesmo que a viscosidade μ do fluido seja pequena, a tensão viscosa dada por $\tau = \mu \partial v/\partial n$ é atuante e não pode ser desprezada. Em muitos casos práticos, entretanto, a atuação das forças viscosas pode ser situada em uma camada muito fina de fluido em contato com a parede. Enquanto nessa tênue camada as forças viscosas são importantes e o escoamento é real e rotacional, fora dela o escoamento pode ser considerado ideal e também irrotacional, se admitirmos tacitamente que o fluido escoar de um reservatório de grandes dimensões, como na Figura 12.2.

A região do fluido onde são apreciáveis as forças viscosas é chamada de *camada-limite*. Em certos casos, a camada-limite se separa da parede e penetra no interior do

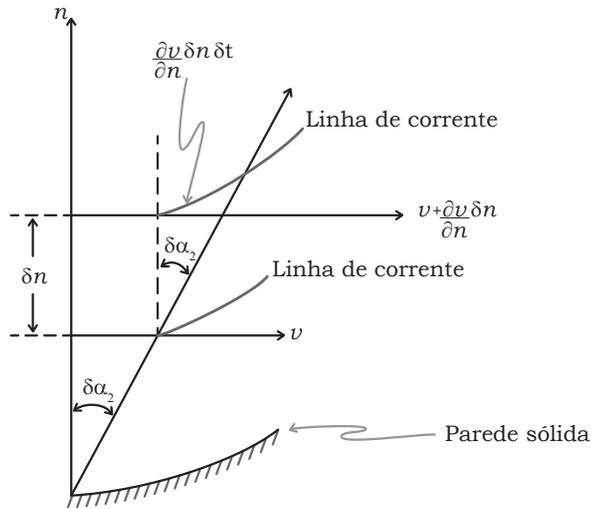


Figura 14.1

fluido, fazendo com que os efeitos das forças viscosas não estejam mais restritos ao escoamento adjacente à superfície do corpo.

Referências

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 10, 1934.

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. *Chemical Engineering Practice*. In: CREMER, H.M.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

Escoamento rotacional

A rotação no contínuo cartesianamente coordenado pelos eixos x, y, z é calculada pela equação (13.2) em função das velocidades angulares médias ω_x, ω_y e ω_z . Consideremos inicialmente a rotação da face $ABCD$ do elemento fluido da Figura 15.1a. A Figura 15.1b mostra que os deslocamentos angulares $\delta\alpha_1$ e $\delta\alpha_2$ dos dois eixos perpendiculares x e y no intervalo de tempo δt são expressos por

$$\delta\alpha_1 = \frac{\overline{DD'}}{\delta x} = \frac{(\partial v_y / \partial x) \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta t, \tag{15.1}$$

$$\delta\alpha_2 = \frac{\overline{BB'}}{\delta y} = \frac{(\partial v_x / \partial y) \delta y \delta t}{\delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta t. \tag{15.2}$$

A face $ABCD$ no intervalo de tempo δt sofre deformação, além de rotação e por isso os deslocamentos angulares $\delta\alpha_1$ e $\delta\alpha_2$ são diferentes.

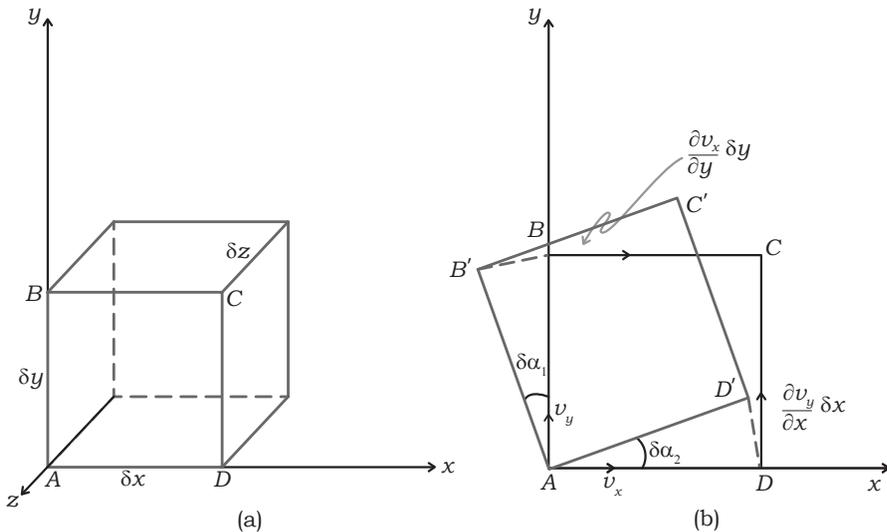


Figura 15.1

Considerando positivo o sentido contrário ao da rotação dos ponteiros do relógio, a rotação do elemento δy do eixo y será negativa porque o aumento de v_x com y produz

rotação no sentido dos ponteiros, então, as velocidades angulares em relação ao eixo z são expressos por

$$\omega_{AD} = \frac{\delta \alpha_1}{\delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (15.3)$$

$$\omega_{AB} = \frac{\delta \alpha_2}{\delta t} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (15.4)$$

e a rotação da face $ABCD$ é expressa por

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\omega_{AD} + \omega_{AB}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \quad (15.5)$$

Por processos análogos podemos chegar a expressões dos componentes médios da rotação em relação aos dois outros eixos x e y , i.e.,

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad (15.6)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right). \quad (15.7)$$

Se qualquer componente de $\vec{\omega}$ for não nulo, o escoamento é chamado de rotacional ao ponto A considerado. Para que o escoamento seja irrotacional é necessário que

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad (15.8)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad (15.10)$$

em todos os pontos do contínuo. Entretanto, podem existir pontos onde estas condições não são conhecidas. Esses pontos são chamados de *pontos singulares* do escoamento irrotacional.

Equações de Euler do escoamento irrotacional

As equações de Euler em coordenadas cartesianas fixas, equações (11.1) a (11.3), podem ser simplificadas para o caso de escoamento irrotacional levando em conta as condições expressas pelas equações (15.8) a (15.10). Para a direção x , por exemplo

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho gh), \quad (15.11)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho gh), \quad (15.12)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + h \right) = 0. \quad (15.13)$$

Para as outras direções, analogamente,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + h \right) = 0, \quad (15.14)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + h \right) = 0. \quad (15.15)$$

Introduzindo nas equações (15.13) a (15.15) o conceito de carga total definido na equação (11.19), temos

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (15.16)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (15.17)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (15.18)$$

Se além de irrotacional e incompressível, o escoamento é permanente,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (15.19)$$

mostrando que a carga total é constante por todo o campo e que a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos do contínuo que não precisam estar na mesma linha de corrente.

Representação vetorial

As condições de escoamento irrotacional dadas pelas equações (15.8) a (15.10) podem ser representadas compactamente pela seguinte expressão vetorial, independente de eixos de referência

$$\text{rot } \vec{v} = 0, \quad (15.20)$$

onde, pela definição do operador rotacional,

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (15.21)$$

Por definição, chamamos de *vetor turbilhão* ou *vetor vorticidade* do elemento fluido ao rotacional da sua velocidade, portanto,

$$\vec{T} = \text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}, \quad (15.22)$$

i.e., o vetor turbilhão é igual duas vezes a velocidade angular.

No caso de escoamento irrotacional, a equação de Euler tem diversas expressões vetoriais. De acordo com as equações (15.16) a (15.18) temos,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } H = 0, \quad (15.23)$$

enquanto a equação (11.11) reduz-se a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v}^2) = \text{grad } \Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad } P. \quad (15.24)$$

Se o escoamento é permanente, essas duas expressões simplificam-se, i.e.,

$$\text{grad } H = \nabla H = 0, \quad (15.25)$$

$$\frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v}^2) = \text{grad } \Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad } P. \quad (15.26)$$

Configuração geral do escoamento ideal

Adotando um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z , a configuração geral do escoamento ideal consiste em resolver um sistema de seis equações e seis incógnitas. As seis equações são as três equações de Euler (equações do movimento ideal),

$$\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho gh), \quad (11.1)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho gh), \quad (11.2)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho gh), \quad (11.3)$$

a equação da continuidade

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (6.11)$$

uma equação de estado da forma $f(P, \rho, T) = 0$ e, no caso de escoamento anisotérmico, uma expressão do primeiro princípio da termodinâmica que relacione energia térmica com energia mecânica. Essas seis equações permitiriam então determinar as seis variáveis v_x, v_y, v_z, ρ, P e T em todos os pontos do contínuo (com exceção dos pontos singulares).

No caso mais restrito de escoamento ideal, permanente, incompressível e homogêneo, ficamos com quatro equações, i.e., as três de Euler sem as acelerações locais e a da continuidade, (6.12). As quatro incógnitas são v_x , v_y , v_z e P . Mesmo nesse caso simplificado a solução do sistema é extremamente difícil, pois as equações do movimento são equações de derivadas parciais de segunda ordem e não lineares. Qualquer solução dessas equações deve incluir um número de condições limites que permita determinar as constantes ou funções de integração.

Condições limites

A análise do escoamento real ou ideal consiste na aplicação dos princípios de mecânica dos fluidos, expressos sob a forma de equações, para configurar um escoamento sujeito a determinadas condições limites. Essas condições limites, às quais as equações do movimento devem obedecer, são as condições iniciais e as de contorno. As *condições iniciais* fornecem os valores das variáveis em qualquer ponto do contínuo no instante inicial $t = t_0$. As condições de contorno especificam o comportamento do fluido junto a paredes sólidas ou na interface com outro fluido.

No caso de escoamentos reais, uma condição de contorno cinemática que deve ser obedecida é a que o fluido deve sempre manter contato com paredes sólidas, i.e., em nenhum ponto do contorno sólido-fluido podem existir penetrações ou vazios. Isto significa que a velocidade do fluido em um dado ponto do contorno com uma parede deve assumir o mesmo valor da velocidade da parede. Se a parede está em repouso, evidentemente a velocidade do fluido em contato com a mesma deve ser nula.

A Figura 15.2 mostra, em duas dimensões, que a velocidade do elemento fluido em relação ao eixo normal à parede sólida, dirigida para o interior do fluido, é igual à soma algébrica dos componentes de v_x e v_y em relação a esse eixo normal, i.e., $v_n = v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta$, onde $\cos \alpha$ e $\cos \beta$ são cossenos diretores da normal em relação aos eixos x e y .

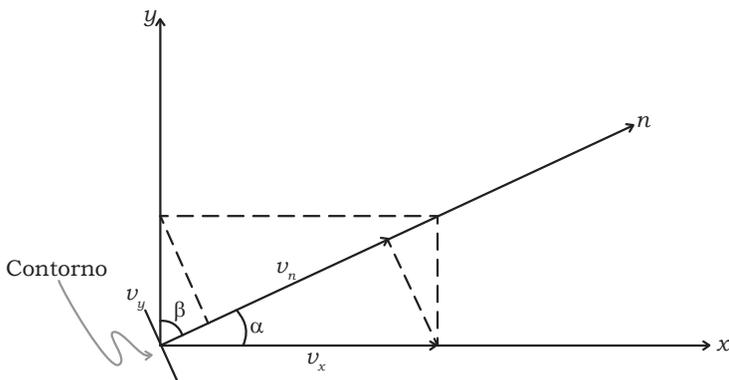


Figura 15.2

Chamando de V_n a velocidade do contorno sólido normal a si mesmo, no mesmo ponto onde a velocidade do elemento fluido normal ao contorno é v_n , temos $V_n = v_n e$,

no caso geral de três dimensões, chamando de l, m, n , os cossenos diretores da normal em relação, respectivamente, aos eixos x, y e z , podemos escrever

$$V_n = lv_x + mv_y + nv_z, \quad (15.27)$$

e, se o contorno está imóvel,

$$lv_x + mv_y + nv_z = 0. \quad (15.28)$$

Como o fluido não tem forma própria, os movimentos dos seus elementos junto a um contorno sólido que contém o fluido devem sempre guardar um contato tangencial com esse contorno. Se a equação do contorno sólido é $f(x, y, z, t) = 0$, as coordenadas de qualquer elemento fluido em contato com o contorno deve obedecer continuamente a essa equação.

No instante t um elemento fluido está na posição (x, y, z) de contorno f ; no instante seguinte $t + \delta t$ o elemento passa para a posição $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ mantendo contato com o contorno; portanto, a variação δf deve ser nula, i.e.,

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t = 0. \quad (15.29)$$

O segmento da trajetória percorrida pelo elemento fluido na superfície f no tempo δt tem como componentes cartesianos: $\delta x = v_x \delta t$, $\delta y = v_y \delta t$ e $\delta z = v_z \delta t$, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (15.30)$$

Empregando o conceito de derivada substantiva, i.e., da derivada em relação ao movimento, podemos exprimir a equação (15.30) por

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \quad (15.31)$$

No caso de contorno imóvel, $\partial f / \partial t$ é nulo e

$$\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z = 0, \quad (15.32)$$

expressão que mostra que as velocidades do elemento em contato com a superfície são tangentes à mesma.

Se a superfície definida por $f = 0$ é uma superfície livre onde atua a pressão atmosférica, temos, $P(x, y, z, t) = P_0$ e então

$$\frac{\partial P}{\partial x} v_x + \frac{\partial P}{\partial y} v_y + \frac{\partial P}{\partial z} v_z + \frac{\partial P}{\partial t} = 0. \quad (15.33)$$

Além dessas condições cinemáticas aplicáveis a contornos sólidos e à superfície livre, temos outras condições que podem ser levadas em conta na integração das equações do movimento:

- a) Fluidos em repouso ou em escoamento ideal exercem forças de pressão normais aos elementos e aos contornos sólidos, enquanto no movimento real, viscoso, os elementos e os contornos sólidos estão sujeitos a forças tangenciais chamadas, também, de forças viscosas ou de atrito.
- b) Na interface de dois fluidos, a pressão em cada ponto deve ser a mesma em cada fluido, i.e., não pode haver alteração brusca de pressão ao longo da interface.
- c) Quando um corpo, por ação de uma força finita se desloca em um fluido que se estende até o infinito, é condição limite essencial que a velocidade do fluido ao infinito permaneça inalterada pelo movimento do corpo; se tal não acontecesse, a ação de uma força finita conferiria energia cinética durante um tempo finito, a uma massa infinita de fluido, e isso é impossível.

Escoamento irrotacional em tubo de corrente

Introduzindo nas equações de Euler as restrições do escoamento ideal, irrotacional, permanente, incompressível e homogêneo ao longo de um tubo de corrente (Fig. 15.3) de seção S variável, reduzimos a configuração à solução de duas equações a duas incógnitas, se admitirmos que nas seções S_1 e S_2 a velocidade é uniforme e normal à superfície, tal como na Figura 9.1.

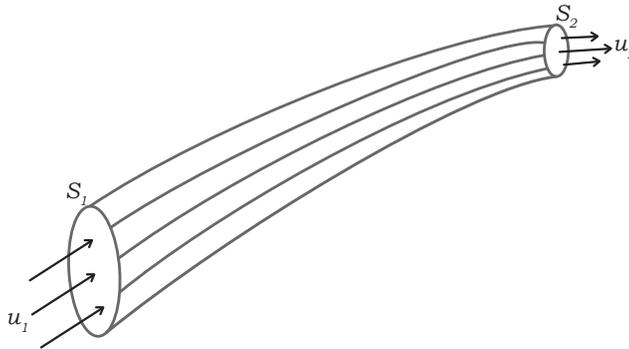


Figura 15.3

Nesse caso as duas equações são as de Bernoulli

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + h = H, \quad (15.34)$$

e a da continuidade, equação (9.8), $uS = Q = C^{te}$, que são suficientes para estabelecer a relação entre a velocidade u e a pressão total P . Essas equações podem fornecer bons resultados quando nas seções de controle S_1 e S_2 for pequena a variação da velocidade local \vec{v} em módulo e direção.

A configuração em torno do perfil aerodinâmico da Figura 9.3 pode ser feita dessa maneira, desde que se conheça o traçado das linhas de corrente.

Escoamento uniforme

No escoamento uniforme a velocidade não sofre variação convectiva, i.e., não varia no espaço. Se além de uniforme o escoamento for permanente, as equações de Euler (11.1) a (11.3) reduzem-se a

$$\text{grad}(P + \rho gh) = 0. \quad (15.35)$$

Esta equação é análoga à equação (3.16), que exprime o equilíbrio das forças que atuam em um fluido em repouso. Na equação (15.35), entretanto, P representa a pressão total, soma da pressão devida ao movimento com a pressão em repouso. Levando em conta a expressão da pressão total dada pela equação (12.4), temos:

$$\text{grad} P = 0, \quad (15.36)$$

onde P passa a representar a pressão de movimento. Esta expressão é usada no escoamento confinado, incompressível, homogêneo e uniforme.

A equação de Bernoulli, (11.19), fornece resultados análogos, i.e.,

$$P + \rho gh = H - \rho(v^2/2) = C^{te}, \quad (15.37)$$

ou seja,

$$P = C^{te}. \quad (15.38)$$

Estas expressões valem para qualquer ponto do escoamento irrotacional onde as linhas de corrente são retas e paralelas entre si. Resumindo, podemos assinalar que neste tipo de escoamento ideal a pressão total (ou a pressão de movimento) distribui-se da mesma maneira que em um fluido em repouso, onde a pressão é a hidrostática.

Referências

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 10, 1934.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 4, 1947.

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

VALLENTINE, H.R. *Applied Hydrodynamics*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 1, 1959.

STREETER, V.L. *Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 20, 1949.

TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulicas*, Editora Globo, Capítulo 5, 1960.

Aplicações das equações do movimento

Muitos casos práticos de escoamento real podem ser estudados, com bons resultados, pela aplicação da equação de Bernoulli, apesar desta equação estar sujeita a restrições importantes.

Teorema de Torricelli

A superfície livre do líquido no reservatório e a superfície do jato (Fig. 16.1) estão sujeitas praticamente à mesma pressão atmosférica, i.e., a uma pressão manométrica nula, enquanto isso, na superfície livre do reservatório (seção 1) a velocidade u_1 é nula e a velocidade uniforme do jato ideal é u_2 finita.

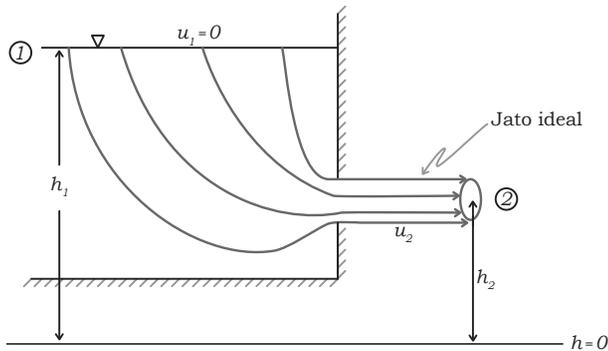


Figura 16.1

Como este é um tipo de escoamento irrotacional, podemos aplicar a equação (15.34) entre dois pontos quaisquer das seções 1 e 2 (Fig. 16.1), portanto,

$$h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + h_2, \tag{16.1}$$

ou, chamando de h o desnível $h_1 - h_2$,

$$u_2 = \sqrt{2gh}, \tag{16.2}$$

que é a expressão do teorema de Torricelli.

A equação (16.2) pode ser aplicada com boa precisão em cada instante de um escoamento transiente no qual a variação do nível da superfície livre do reservatório é lenta.

Pressão de estagnação

Aplicando a equação de Bernoulli (11.19) entre os pontos 1 e 2 da linha de corrente central do jato contra a parede plana (Fig. 16.2), resulta

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho v_1^2 / 2. \quad (16.3)$$

O aumento da pressão $P_2 - P_1$ é devido à transformação da taquicarga volumétrica $\rho v_1^2 / 2$, pois no ponto 2, que é um ponto de estagnação, a velocidade é nula. O termo $\rho v_1^2 / 2$ é chamado de *pressão dinâmica*; P_1 é chamada de *pressão estática* porque seria a pressão indicada por um manômetro que fosse levado com o escoamento; P_2 é a soma da pressão estática com a pressão dinâmica, também chamada de *pressão total* ou *pressão de estagnação*.

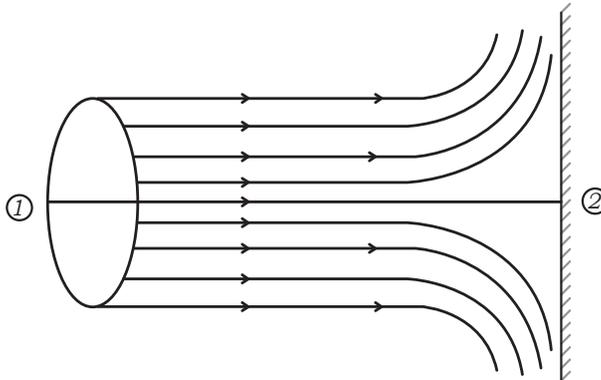


Figura 16.2

O peso dos volumes de controle (reduzidos a um ponto) em 1 e 2 é equilibrado pela força hidrostática de flutuação, portanto a equação (16.3) pode ser posta na seguinte forma, que é uma aplicação da equação (12.5)

$$\Delta P = \Delta P^* = \rho v_1^2 / 2, \quad (16.4)$$

daí vemos que a soma de pressão estática para P_1 na equação (16.3) é imprópria, pois P_1 inclui a pressão devida ao escoamento.

Escoamento radial

Na Figura 16.3, admitamos que a vazão volumétrica constante Q atravessa a área de escoamento ($2\pi r b$), onde b é a folga entre as placas. A velocidade em qualquer seção é dada por $u = Q / 2\pi r b$, portanto,

$$ur = C^{te}, \quad (16.5)$$

i.e., a velocidade varia inversamente com o raio.

Aplicando a equação (15.34) entre a seção 1 e uma seção qualquer de raio r , temos

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{u^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} = H, \quad (16.6)$$

onde, de acordo com a equação (16.5), $u = u_1(r_1/r)$, portanto,

$$\frac{P}{\rho g} = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right), \quad (16.7)$$

$$\frac{P}{\rho g} = H - \frac{u_1^2}{2g} \left(\frac{r_1}{r}\right)^2. \quad (16.8)$$

Esta expressão mostra que no escoamento radial a pressão varia inversamente com o quadrado do raio.

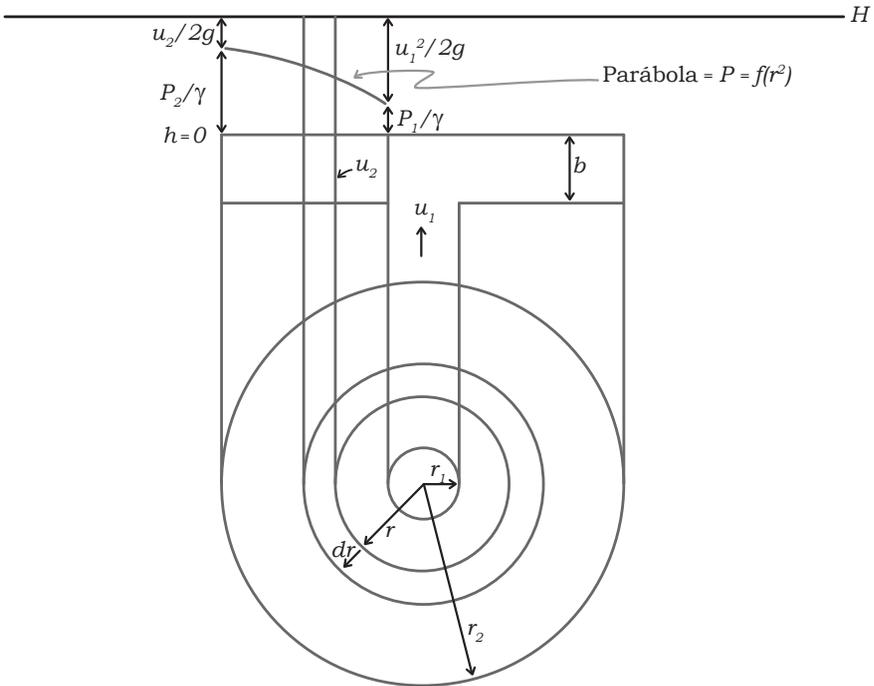


Figura 16.3

Medida de pressão e de velocidade na linha de corrente

Suponhamos que a linha de corrente L da Figura 16.4 esteja configurando um escoamento permanente, incompressível e homogêneo. Introduzindo no líquido um tubo

com a seção transversal paralela à linha de corrente, esta não será perturbada e o líquido alcançará uma altura l_1 que equilibre a pressão existente no ponto A_1 (pressão estática); este tubo é um tubo piezométrico.

Em um outro ponto A_2 da mesma linha de corrente, a nova altura é $l_2 = P_2/\rho g$ e, em virtude da equação de Bernoulli, vemos que

$$\Delta l = (h_2 + l_2) - (h_1 + l_1) = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}, \quad (16.9)$$

expressão que dá a diferença entre as taquicargas e permite calcular a velocidade em um ponto quando se conhece a velocidade em outro ponto.

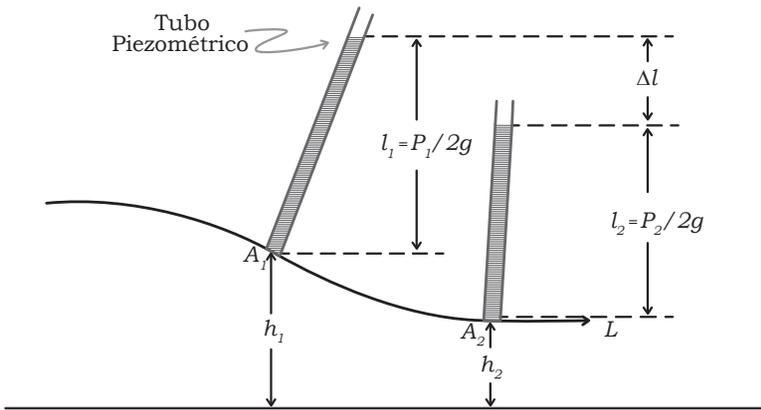


Figura 16.4

Introduzindo um tubo em L com a seção transversal normal à linha de corrente (tubo de Pitot, Fig. 16.5) o escoamento sofrerá uma perturbação e a velocidade se anula no ponto A, que é um ponto de estagnação, como o ponto 2 da Figura 16.2. A pressão P_t (pressão de estagnação) equilibrada pela altura do líquido no tubo de Pitot excede a pressão P (pressão estática), que seria equilibrada por um tubo piezométrico colocado no mesmo ponto. P_t é dada por

$$P_t = P + (\rho v^2/2), \quad (16.10)$$

onde v é o módulo de \vec{v} no ponto considerado.

Usualmente fazemos simultaneamente as medidas de P e P_t em um dado ponto com o auxílio de uma sonda combinada de Pitot, que é uma combinação do tubo piezométrico com o tubo originalmente concebido por Pitot (Fig. 16.5). Esses dois tubos são ligados a um manômetro diferencial, de cuja leitura tiramos o valor de $v^2/2g$ e daí o valor da velocidade v .

Referências

LEWITT, E.H. *Hydraulics and Fluid Mechanics*, Sir Isaac Pitman & Sons, Capítulo 3, 1959.

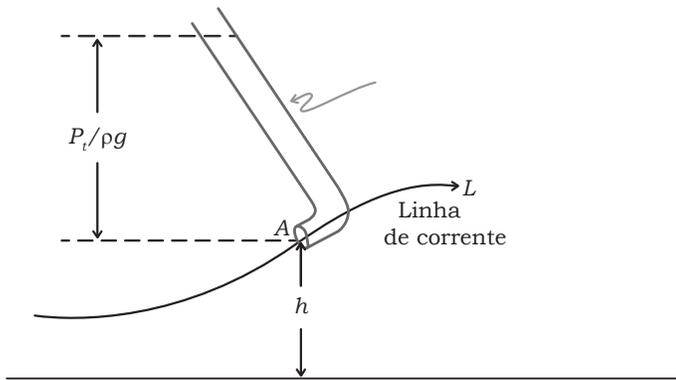


Figura 16.5

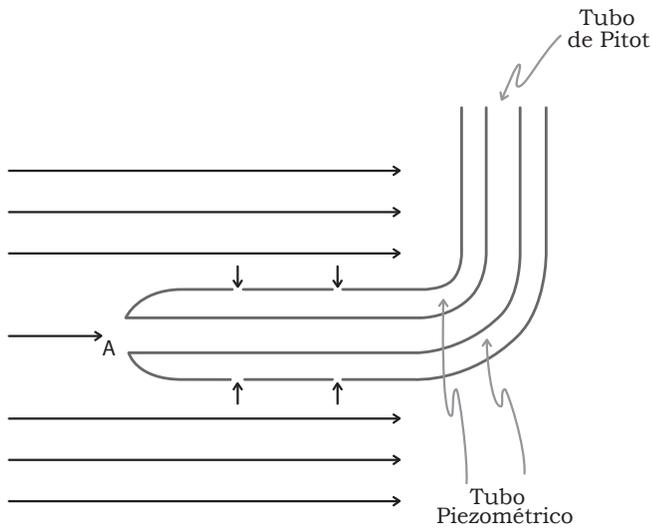


Figura 16.6

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 9, 1934.

DAUGHERTY, R.L.; INGERSOLL, A.C. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 5, 1954.

BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dossat, Capítulo 10, 1960.

Escoamento ideal com trajetória curva

É mais simples estudar o escoamento com trajetória curva empregando as equações de Gauss em coordenadas cilíndricas, equações (11.4) a (11.6). Na direção tangencial ao volume de controle da Figura 17.1 não atuam forças, porque o escoamento é ideal. Portanto, as três equações reduzem-se a duas que, para escoamento permanente, são

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_\psi^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (P + \rho g h), \quad (17.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho g h). \quad (17.2)$$

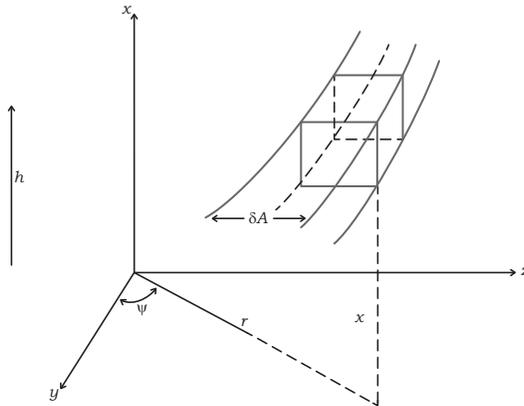


Figura 17.1

Não há escoamento nas direções x e r ; portanto, v_x e v_r , $\partial v_r / \partial \psi$, $\partial v_x / \partial \psi$ são nulos. Chamando v_ψ de v e fazendo a coincidência do eixo x com o eixo das cotas, temos

$$\partial P / \partial r = \rho (v^2 / r), \quad (17.3)$$

$$\partial P / \partial h = -\rho g. \quad (17.4)$$

A equação (17.3) mostra que na direção radial a força centrífuga é equilibrada pela força de pressão.

A variação total de $P = P(r, h)$ é expressa por

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial h} dh = \rho \frac{v^2}{r} dr - \rho g dh. \quad (17.5)$$

Esta variação depende da relação entre v e r .

A variação diferencial de carga total entre duas linhas de corrente curvas separadas de dh é dada pela expressão diferencial da equação (11.19) de Bernoulli, i.e.,

$$dH = \frac{v}{g} dv + \frac{1}{\rho g} dP + dh, \quad (17.6)$$

onde, de acordo com a equação (17.5)

$$\frac{1}{\rho g} dP + dh = \frac{v^2}{g} \frac{dr}{r}. \quad (17.7)$$

Portanto, a equação (17.6) fica igual a

$$\frac{dH}{dr} = \frac{v}{g} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right), \quad (17.8)$$

i.e., a variação radial de carga total depende da relação $v = v(r)$. Esta equação é análoga à equação (14.4); nela aparece dv/dr em vez de $\partial v/\partial r$ porque no presente caso v só varia com r . Portanto, podemos ter dois casos de escoamento com trajetória curva; um altamente rotacional que é o *vórtice forçado*, quando dH/dr é finito, e o outro, irrotacional, quando $(dv/dr) + (v/r)$ e dH/dr são identicamente nulos, que é o *vórtice livre*.

A Figura 17.2a mostra o movimento de um volume de controle sujeito a um vórtice forçado enquanto a Figura 17.2b ilustra o caso do vórtice livre.

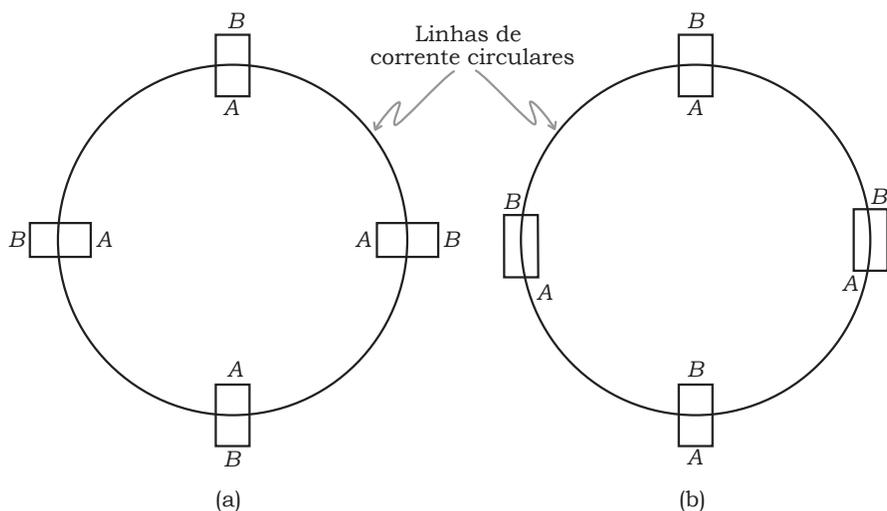


Figura 17.2

a) Vórtice forçado. O vórtice forçado é um movimento circular segundo o qual o fluido sujeito a um torque externo roda como uma massa sólida, sem escorregamento entre as camadas. É o caso da rotação de líquidos em centrífugas ou no rotor de bombas centrífugas. Este tipo de escoamento foi estudado com o nome de rotação uniforme como uma aplicação das equações diferenciais de um fluido em condição estática (3.3) a (3.5).

Se o fluido roda como uma massa sólida, a velocidade linear v é diretamente proporcional ao raio, i.e.,

$$\frac{v}{r} = \omega = C^{te}, \quad (17.9)$$

onde ω é a velocidade angular dos elementos fluidos sujeitos a trajetórias circulares, portanto,

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 2\omega = C^{te}, \quad (17.10)$$

onde 2ω é o módulo do vetor turbilhão definido pela equação (15.22).

Combinando as equações (17.9) e (17.8) chegamos a uma expressão da variação radial da carga total

$$\frac{dH}{dr} = \frac{2\omega^2 r}{g}. \quad (17.11)$$

Quando $r = 0$, $H = 0$, portanto, integrando essa equação, temos

$$H = \frac{(\omega r)^2}{g} = \frac{v^2}{g}, \quad (17.12)$$

i.e., a carga total varia com o quadrado do raio, o que prova mais uma vez que o vórtice forçado é um tipo extremo de escoamento ideal rotacional, onde a equação de Bernoulli não pode ser aplicada radialmente. Neste caso, as superfícies isobáricas são superfícies de paraboloides de revolução tal como mostram a Figura 5.2 e a equação (5.12).

O vórtice forçado é produzido pela ação de forças viscosas. Em uma centrífuga, por exemplo, no início da rotação, como o fluido viscoso não escorrega na parede sólida, haverá movimento relativo entre as camadas mais próximas da parede e as mais afastadas. Esse movimento relativo é induzido pelas tensões viscosas que aceleram a massa de fluido. Depois de certo tempo o fluido passa a rodar em massa, sem qualquer deformação e sem qualquer atuação das forças viscosas. Daí em diante o fluido comporta-se como um fluido em repouso.

b) Vórtice livre. No vórtice livre, também chamado de vórtice potencial, a rotação é produzida sem o auxílio direto de energia externa; ocorre por rotação prévia ou por consumo de energia interna. O vórtice livre é encontrado em combinação com outros tipos de escoamento nos seguintes exemplos: redemoinhos em rios, redemoinhos que se formam no esvaziamento de vasos rasos, vórtices em ciclones, rotação das porções mais afastadas dos líquidos agitados em um misturador rotativo e rotação de líquidos no encanamento de sucção ou na voluta de bombas centrífugas.

Se o fluido não recebe energia, a carga total de todas as linhas de corrente é constante, dH/dr é nulo e o escoamento é classificado como irrotacional, i.e., $(dv/dr) + (v/r) = 0$ e, conseqüentemente,

$$vr = C^{te}. \quad (17.13)$$

Esta equação mostra também que no vórtice potencial a quantidade de movimento angular, mvr , é constante. Substituindo na eq. (17.5) v por c/r e integrando entre dois pontos do campo, temos,

$$\frac{P - P_1}{\rho g} + (h - h_1) = \frac{c^2}{2g} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (17.14)$$

Vemos que P aumenta com o aumento do raio, enquanto v diminui. A relação $h - h_1$ na equação (17.14) mostra que as superfícies isobáricas são superfícies hiperbólicas (Fig. 17.3), inclusive a superfície livre, se existir.

A expressão da carga total H , constante em todo o campo é dada pela equação de Bernoulli, (11.19), onde $v = c/r$.

$$H = \frac{P}{\rho g} + h + \frac{c^2}{2gr^2}. \quad (17.15)$$

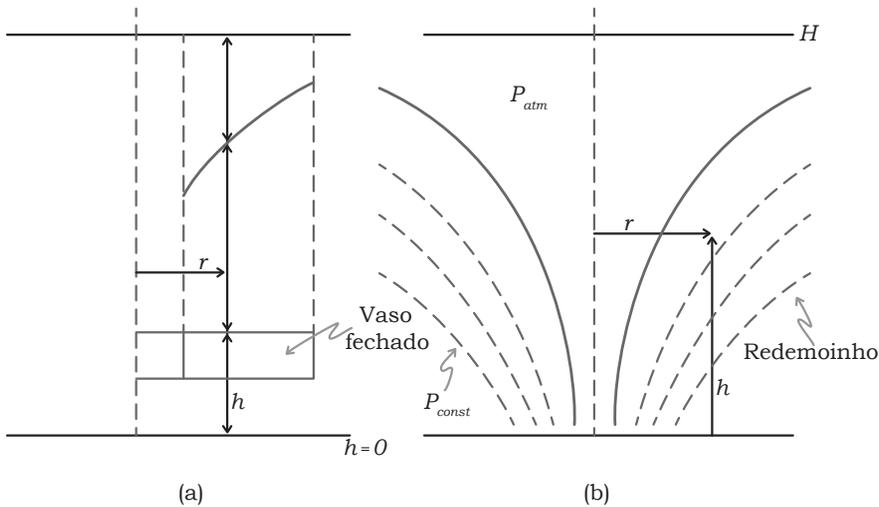


Figura 17.3

Esta expressão mostra que quando r tende para infinito, o valor de $(P/\rho g) + h$ tende para o valor da carga total H , enquanto a velocidade tende para zero. A linha piezométrica tem, então, H como assíntota. Por outro lado, quando r tende para zero, v tende para infinito e $(P/\rho g) + h$ tende para menos infinito; portanto, como tais limites constituem uma impossibilidade física, o vórtice livre não pode se estender até o eixo de rotação. O que ocorre é que nas proximidades do eixo a velocidade de rotação é muito alta,

e as forças viscosas tornam-se tão importantes que não podem mais ser desprezadas. Então, no centro, não é válida a suposição de H constante. O centro do vórtice livre tem a tendência de rodar como um corpo sólido, característico de vórtice forçado. Na Figura 17.4, de $r = 0$ até $r = r_0$, a distribuição da pressão é parabólica, tal como no caso do vórtice forçado. Esta figura mostra uma transição abrupta, em $r = r_0$, do vórtice livre para o forçado; entretanto, na realidade, a transição é gradativa.

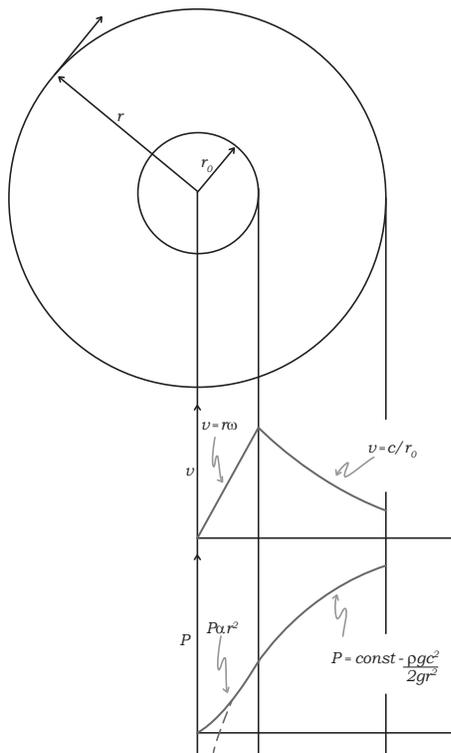


Figura 17.4

c) Vórtice em espiral. O vórtice em espiral resulta da superposição dos movimentos circular e radial. O movimento circular puro tem o nome de vórtice cilíndrico (livre ou forçado). Se na centrífuga esquematizada na Figura 5.2 houver extravasamento pelas bordas ou drenagens por um orifício no fundo, haverá a produção do vórtice em espiral. O redemoinho ilustrado na Figura 17.3b, que se forma quando se esvazia por um orifício um vaso raso, é um exemplo de vórtice em espiral produzido pela combinação do escoamento circular com o radial. Nas bombas centrífugas, há também a superposição dos vórtices cilíndricos forçados (no rotor) e livre (na voluta) com o escoamento radial.

Referências

DAUGHERTY, R.L.; INGERSOLL, A.C. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 5, 1954.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 2, 1957.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 4, 1947.

Escoamento real

No escoamento real as forças viscosas não podem ser desprezadas, pelo menos nas proximidades das paredes sólidas. Chamamos de camada-limite a camada do fluido em contato com a parede sólida onde as forças viscosas são apreciáveis. Fora desta camada podemos analisar o escoamento do fluido real como se fosse escoamento ideal. Em muitos casos, a presença da camada-limite não precisa ser levada em conta, em outros, porém, ela tem atuação importante.

Diversas experiências simples comprovam a atuação das forças viscosas:

1. A Figura 18.1a mostra o resultado da medida da velocidade em diversos pontos do diâmetro de um tubo. Existe um perfil de velocidade; junto à parede a velocidade é nula e no eixo do duto ela atinge um valor máximo. Se o escoamento fosse ideal o fluido escorregaria pelo contorno sólido, sem atrito, e não haveria variação transversal de velocidade (Fig. 18.1b).
2. Junto a uma placa plana (Fig. 18.2) em contato com uma corrente fluida forma-se uma fina camada-limite onde é apreciável a atuação das forças viscosas e onde pode ser medido um gradiente de velocidade. Fora da camada-limite admitimos que a velocidade tem um valor constante v_{∞} (seria infinitamente longe da placa) praticamente igual a velocidade de ataque v_0 .

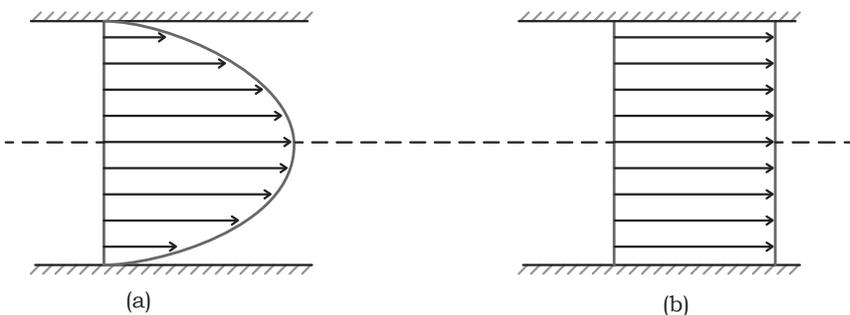


Figura 18.1

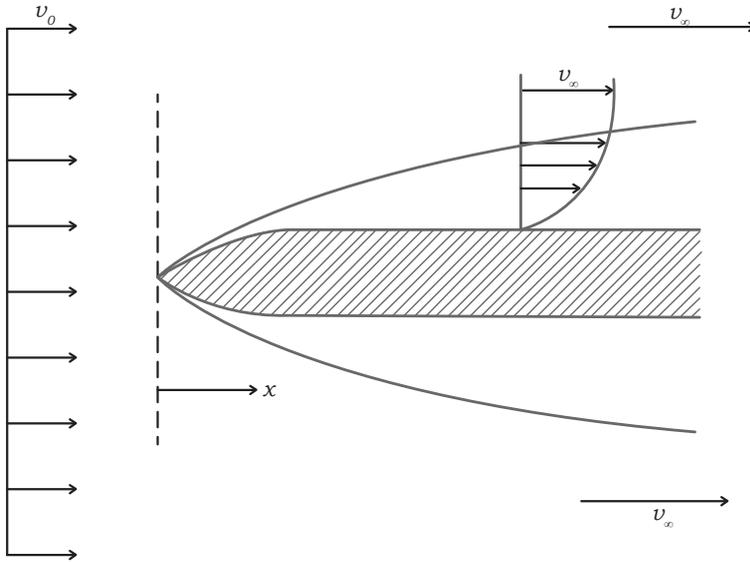


Figura 18.2

Escoamento laminar e turbulento

No equipamento esquematizado na Figura 18.3, Reynolds conduziu experiências variando a velocidade do escoamento da água no tubo de vidro e observando o filete de corante. Velocidades baixas produziam filetes retos e estáveis e velocidades mais altas acarretavam irregularidades no filete e mistura do corante com a água.

O tipo de escoamento ligado às menores velocidades nas experiências de Reynolds é chamado de escoamento laminar, enquanto o de velocidades mais altas é o escoamento turbulento. No escoamento laminar de fluido real, ocorre a troca de quantidade de movimento em escala molecular entre as lâminas do fluido (Fig. 1.2). No escoamento turbulento, considera-se que haja um movimento transversal de porções do fluido, i.e., de turbilhões, superpondo-se ao movimento molecular transversal viscoso. O escoamento crítico oscila com o tempo, para uma mesma velocidade, entre o laminar e o turbulento; é um escoamento de transição.

Segundo Reynolds, no escoamento laminar predominam as forças viscosas, enquanto no escoamento turbulento as forças de inércia sobrepõem-se às viscosas. A razão entre as forças de inércia e as viscosas é, geralmente, expressa por um grupo adimensional de variáveis chamado de número de Reynolds.

Em um escoamento paralelo ao eixo x , a força de inércia por unidade de volume tem como valor $\rho Dv_x/Dt$, ou em regime permanente, de acordo com a equação (10.11), $(\partial v_x/\partial x)\rho v_x$. De acordo com a equação (1.6), a força viscosa por unidade de volume é dada por $\partial\tau_{yx}/\partial y = \mu(\partial^2 v_x/\partial y^2)$, portanto, a relação entre as forças de inércia e as de atrito viscoso é expressa por

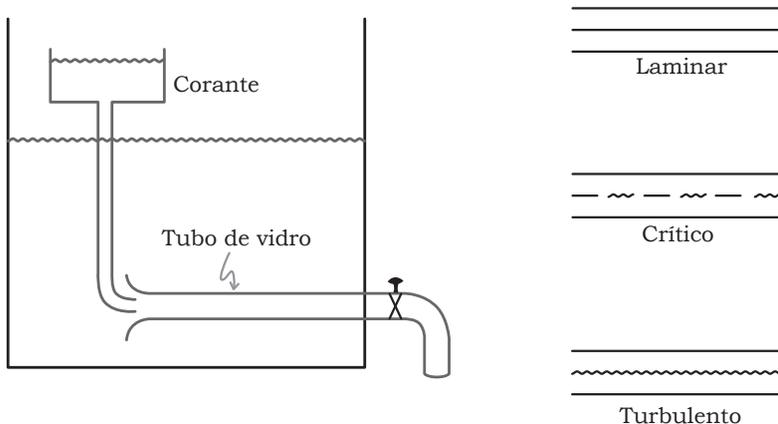


Figura 18.3

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho v_x \partial v_x / \partial x}{\mu \partial^2 v_x / \partial y^2} \quad (18.1)$$

A velocidade v_x é proporcional à velocidade média u , o gradiente $\partial v_x / \partial x$ à relação u/D , D sendo o diâmetro do duto e $\partial^2 v_x / \partial y^2$ é proporcional a u/D^2 . Portanto,

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho u^2 / D}{\mu u / D} = \frac{\rho u D}{\mu} = \text{Re}, \quad (18.2)$$

onde o número de Reynolds é representado abreviadamente por Re.

As experiências de Reynolds mostraram que o número de Reynolds crítico de transição entre os escoamentos laminar e turbulento oscila entre, aproximadamente, 2.000 a 5.000. No limite inferior, a turbulência é amortecida pelas forças viscosas, enquanto o limite superior depende da natureza da turbulência inicial, do perfilamento da boca de entrada do tubo, de vibrações, etc. Eliminadas cuidadosamente todas as causas promotoras de irregularidades no escoamento, consegue-se elevar o número de Reynolds crítico superior para valores da ordem de 10.000 a 100.000.

No caso da placa plana, a camada-limite passa de laminar para turbulenta em torno de

$$\text{Re}_{crit} = \frac{\rho v_0 x}{\mu} = 3,5 \times 10^5 \text{ a } 10^6, \quad (18.3)$$

onde x é a distância ao longo da placa medida a partir do bordo de ataque. Esse valor vale para uma placa de bordo afilado paralela à corrente do fluido, cuja velocidade de ataque é v_0 (Fig. 18.2).

Escoamento turbulento permanente

No escoamento turbulento, tanto a velocidade v como a pressão P variam com o tempo em um dado ponto. A definição de escoamento permanente precisa, então, ser estendida para incluir o escoamento turbulento.

A descrição do escoamento turbulento pode ser convenientemente separada em um escoamento médio e um escoamento flutuante, i.e.,

$$v_x = \overline{v_x} + v'_x, \quad (18.4)$$

$$v_y = \overline{v_y} + v'_y, \quad (18.5)$$

$$v_z = \overline{v_z} + v'_z, \quad (18.6)$$

$$P = \overline{P} + P', \quad (18.7)$$

ou seja, os valores instantâneos em um dado ponto do escoamento são iguais à soma do valor médio temporal com o valor flutuante. A média temporal em um dado ponto do contínuo é expressa, por exemplo, por

$$\overline{v_x}(t) = \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} v_x dt, \quad (18.8)$$

onde o intervalo de tempo δt é suficientemente longo. Segue-se que, por definição:

$$\overline{v'_x} = 0, \quad \overline{v'_y} = 0, \quad \overline{v'_z} = 0, \quad (18.9)$$

$$\overline{P'} = 0. \quad (18.10)$$

Consideraremos que o escoamento turbulento é permanente quando os valores médios da velocidade e da pressão em um dado ponto são constantes com o tempo. Este tipo de escoamento é chamado de *escoamento quasi-permanente*.

Referências

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 18, 1960.

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. *Chemical Engineering Practice*. In: CREMER, H.M; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 11, 1959.

Energia do escoamento e energia interna

O trinômio de Bernoulli, expresso pela equação (11.19), foi deduzido a partir das equações de Euler que, por sua vez, são baseadas na Segunda Lei de Newton. A equação de Bernoulli pode ser também considerada como uma expressão de conservação de energia total do escoamento, i.e., como aplicação do primeiro princípio da termodinâmica ao escoamento ideal e incompressível de um fluido homogêneo. Ao longo de uma linha de corrente instantânea ou, no caso de escoamento irrotacional ao longo de um tubo de corrente, as energias de pressão, cinética e potencial são interconvertíveis, porém, a energia total de escoamento, soma das três formas de energia, é sempre constante.

Além das três formas de energia ditas de escoamento, a energia total dos fluidos em movimento deve incluir a energia interna, que é devida ao movimento das moléculas do fluido. Esta forma de energia não entra em jogo no escoamento ideal, incompressível, porque não há neste escoamento conversão de qualquer forma de energia em energia interna. No escoamento real, incompressível, laminar, as forças viscosas convertem parte da energia de escoamento em energia térmica, enquanto no escoamento turbulento há uma degradação dos turbilhões em movimento molecular desordenado, degradação esta que também transforma uma parte da energia de escoamento em energia térmica. A energia térmica produzida por ação das forças viscosas ou pela degradação dos turbilhões reflete-se como alteração na energia interna do fluido. Consequentemente, o escoamento real deve incluir a energia interna.

Conservação de energia

Consideremos que no sistema esquematizado na Figura 19.1 escoam um fluido viscoso incompressível. Em um pequeno elemento de área δS_1 da seção S_1 , conhecemos, no curto intervalo de tempo δt o valor do vetor velocidade \vec{v}_1 , cujo módulo é v_1 , o valor da tensão normal (pressão) P_1 e o da temperatura do fluido, T_1 . No intervalo de tempo δt a taxa de transferência de energia mecânica cedida pela bomba ao fluido é representada pela potência útil P_u , enquanto a taxa de transferência de energia térmica cedida pelo trocador é q .

A energia é uma grandeza escalar enquanto o seu fluxo é um vetor, que necessita de três componentes cartesianos para defini-lo. Exprimindo as diversas formas de energia, por unidade de volume, o fluxo será dado pelo produto desta “concentração” pelo vetor velocidade \vec{v} .

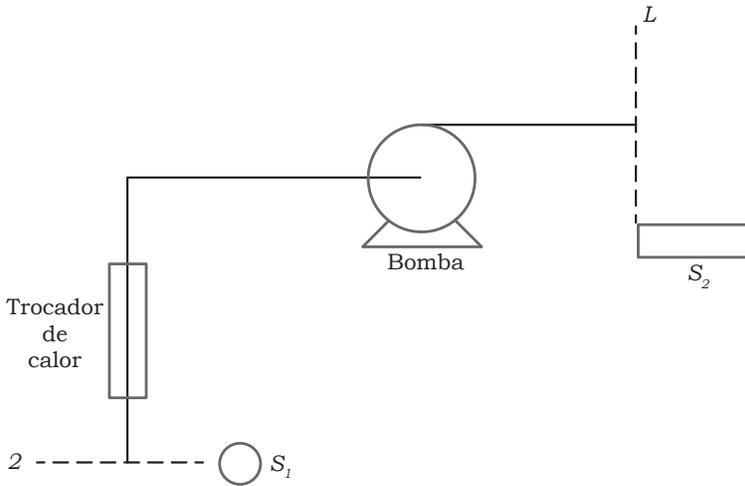


Figura 19.1

Os fluxos através de δS , são:

$$\text{fluxo de energia cinética} \quad \left(\frac{\rho v_1^2}{2} \right) \vec{v}_1, \quad (19.1)$$

$$\text{fluxo de energia de pressão} \quad (P_1) \vec{v}_1, \quad (19.2)$$

$$\text{fluxo de energia potencial} \quad (\rho g h_1) \vec{v}_1 = (-\rho \Omega) \vec{v}_1, \quad (19.3)$$

$$\text{fluxo de energia interna} \quad (\rho c_v T_1) \vec{v}_1. \quad (19.4)$$

Nessas expressões, c_v é o calor específico a volume constante e os potenciais térmico T e gravitacional $\Omega (= -gh)$ são medidos em relação a um zero referência arbitrário.

No intervalo de tempo δt a taxa de entrada de energia através da área da seção S_1 é dada por

$$\int_{S_1} \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 + \rho g h_1 + \rho c_v T_1 \right) \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1.$$

Analogamente, a taxa de saída de energia por S_2 é expressa por

$$\int_{S_2} \left(\rho \frac{v_2^2}{2} + P_2 + \rho g h_2 + \rho c_v T_2 \right) \vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2.$$

A expressão geral da conservação diz que a “acumulação = entrada – saída + fonte – sumidouro”. Admitindo regime permanente, a acumulação é nula e o que entra e sai no tempo δt , entra e sai em qualquer tempo. Portanto, na ausência de fonte e sumidouro e levando em conta as energias cedidas pela bomba e pelo trocador, temos

$$\begin{aligned} P_u + q + \int_{S_1} \left(\rho \frac{v_1^2}{2} + P_1 + \rho g h_1 + \rho c_v T_1 \right) \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1 \\ = \int_{S_2} \left(\rho \frac{v_2^2}{2} + P_2 + \rho g h_2 + \rho c_v T_2 \right) \vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Escolhendo as superfícies de controle de tal modo que sejam normais aos vetores velocidades \vec{v} , os módulos dos fluxos totais de energia serão dados por $\rho v^3/2$, Pv , ρghv e $\rho v c_v T$. Dividindo ambos os membros da equação (19.5) por ρg , resulta,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \frac{v_1^3}{2g} dS_1 + \int_{S_1} \frac{P_1 v_1}{\rho g} dS_1 + \int_{S_1} h_1 v_1 dS_1 + \frac{c_v}{g} \int_{S_1} T_1 v_1 dS_1 + \frac{P_u}{\rho g} + \frac{q}{\rho g} \\ = \int_{S_2} \frac{v_2^3}{2g} dS_2 + \int_{S_2} \frac{P_2 v_2}{\rho g} dS_2 + \int_{S_2} h_2 v_2 dS_2 + \frac{c_v}{g} \int_{S_2} T_2 v_2 dS_2. \end{aligned} \quad (19.6)$$

De acordo com a equação da continuidade, equação (7.5), $\int_{S_1} v_1 dS_1 = \int_{S_2} v_2 dS_2 = Q$, vazão volumétrica. Dividindo ambos os membros da equação (19.6) por Q , podemos exprimir o resultado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + \beta_1 \frac{\bar{P}_1}{\rho g} + \varphi_1 \bar{h}_1 + \varepsilon_1 \frac{c_v}{g} \bar{T}_1 + \frac{P_u}{Q\rho g} + \frac{q}{Q\rho g} \\ = \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + \beta_2 \frac{\bar{P}_2}{\rho g} + \varphi_2 \bar{h}_2 + \varepsilon_2 \frac{c_v}{g} \bar{T}_2, \end{aligned} \quad (19.7)$$

onde, em qualquer seção normal ao escoamento,

$$\alpha \bar{v}^2 = \int_S v^3 dS / \int_S v dS, \quad (19.8)$$

$$\beta \bar{P} = \int_S P v dS / \int_S v dS, \quad (19.9)$$

$$\varphi \bar{h} = \int_S h v dS / \int_S v dS, \quad (19.10)$$

$$\varepsilon \bar{T} = \int_S T v dS / \int_S v dS. \quad (19.11)$$

Os valores dos coeficientes α , β , φ e ε dependem, para uma dada vazão Q , da definição dos valores médios \bar{v} , \bar{P} , \bar{h} e \bar{T} . No presente caso, \bar{v} representa a média espacial e não a temporal como anteriormente.

Velocidade média

Em condutos forçados é usual o emprego da velocidade média definida pela equação (9.4), i.e.,

$$\bar{v} = u = \frac{Q}{S} = \frac{\int_s v dS}{\int_s dS}. \quad (19.12)$$

Combinando esta equação com a equação (19.8) para eliminar u , tiramos o seguinte valor de α :

$$\alpha = \frac{1}{u^3 S} \int_s v^3 dS. \quad (19.13)$$

Portanto, o valor de α depende do perfil da velocidade, i.e., de como v varia ao longo da seção. Se o escoamento é laminar o perfil é expresso por $v = 2u[1 - (r/R)^2]$ (ver a equação (33.15)), onde R é o raio do duto e r é um raio qualquer menor do que R . Substituindo este valor de v na equação (19.13) e integrando de $r = 0$ até $r = R$ resulta $\alpha = 2,0$. Segue-se que a carga cinética do escoamento laminar é dada por u^2/g . O perfil do escoamento turbulento depende, em um dado tubo, do valor do número de Reynolds; entretanto, as expressões empíricas da relação entre a velocidade local v e a distância radial r conduzem a valores de α que variam aproximadamente entre 1,00 e 1,10.

Nos problemas comuns de escoamento em dutos para transporte de fluidos, a carga cinética é usualmente de menor valor, além disso, o escoamento é quase sempre turbulento. Por estes motivos, é costume considerar a carga cinética sempre expressa por $u^2/2g$, i.e., $\alpha = 1,0$, mesmo quando o escoamento é laminar. No caso de escoamento ideal, irrotacional, o valor de α é sempre um.

Temperatura média

A temperatura média do fluido em uma certa seção do conduto pode ser definida como a temperatura resultante da perfeita mistura de todo o fluido contido na seção. É então expressa matematicamente por

$$\bar{T} = \frac{\int_s T v dS}{\int_s v dS}, \quad (19.14)$$

portanto, de acordo com a equação (19.11), $\varepsilon = 1,0$.

Pressão e cota média

Tomando as seções de controle S_1 e S_2 planas e normais ao vetor velocidade, i.e., considerando que nessas seções o escoamento é unidirecional, teremos que, embora P e h variem ao longo da seção, a soma $P + \rho gh$ será constante. Consequentemente, neste caso, não será necessário usar valores médios individuais da pressão total ou da cota h .

Quando a velocidade na seção é constante em módulo e direção, como ocorre no escoamento irrotacional, podemos definir os valores médios de P e h por

$$\bar{P} = \frac{1}{S} \int_s P dS, \quad (19.15)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_s h dS, \quad (19.16)$$

para, de acordo com as equações (19.9) e (19.10) tornar, respectivamente, β e φ iguais a um.

Referências

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 10, 1959.

BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dossat, 1960.

Equação simplificada de energia

Tomando como primeira aproximação $\alpha = 1$, usando a temperatura de mistura como temperatura média e admitindo que nas seções de controle o escoamento é unidirecional, podemos escrever a equação (19.7) do seguinte modo

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \left(\frac{P_1}{\rho g} + h_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\rho g} + h_2 \right) + \frac{P_u}{Q\rho g} = \frac{c_v}{g} (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) - \frac{q}{Q\rho g}. \quad (20.1)$$

No caso de escoamento ideal, a energia total de escoamento $(u^2/2g) + (P/\rho g) + h$ não se transforma em energia térmica. A energia mecânica cedida pela bomba aumenta a energia de escoamento enquanto a energia térmica cedida pelo trocador aumenta a energia interna. Portanto, no caso de escoamento ideal, ambos os membros da equação (20.1) são igualmente nulos, i.e.,

$$\frac{P_u}{Q\rho g} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \left(\frac{P_2}{\rho g} + h_2 \right) - \left(\frac{P_1}{\rho g} + h_1 \right), \quad (20.2)$$

$$\frac{q}{Q\rho g} = \frac{c_v}{g} (\bar{T}_2 - \bar{T}_1). \quad (20.3)$$

No caso de escoamento viscoso haverá, por causa do atrito interno, a conversão de uma parte da energia de escoamento que entra na seção S_1 da Figura 19.1, em energia térmica, que aumenta a energia interna do fluido. Chamamos de *carga de atrito*, h_a , a parte da energia de escoamento por unidade de peso do fluido, que se transforma em calor. Então, para o escoamento real, temos

$$\frac{c_v}{g} (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) = h_a. \quad (20.4)$$

Em geral, mesmo no caso de sistema adiabático, não podemos usar esta expressão para determinar h_a , porque a medição do pequeno aumento de temperatura que acompanha as “perdas por atrito” é muito difícil.

Combinando as equações (20.1) e (20.4) para eliminar a energia, resulta

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 + \frac{P_u}{Q\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2 - \frac{q}{Q\rho g} + h_a, \quad (20.5)$$

que é expressão da conservação da energia ou *balanço de carga*. Afastando do sistema a bomba e o trocador, temos,

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2 + h_a. \quad (20.6)$$

Quando o escoamento é ideal, $h_a = 0$, e esta expressão se transforma na equação (12.1), válida em dois pontos quaisquer ao longo de um tubo de corrente se o escoamento é irrotacional ou, ao longo de uma linha de corrente instantânea, no caso de escoamento ideal rotacional.

Conservação de energia no escoamento turbulento

A equação (19.5) inclui a restrição de escoamento permanente, entretanto, o escoamento turbulento é, quanto aos elementos fluidos, um caso de escoamento transiente. Neste caso, a equação (19.5) tem que ser modificada. A entrada de energia através da seção S_1 da Figura 19.1, por exemplo, deve ser expressa por

$$\int_{S_1} \int_t \left(\rho \frac{v_1^2}{2} + P_1 + \rho g h_1 + \rho c_v T_1 \right) \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1 dt,$$

enquanto a acumulação, diferente de zero, deve ser dada por $\delta E dt$ onde δE representa a taxa de acumulação de energia no sistema. Deste modo, então, podemos armar um balanço de energia do escoamento transiente onde cada variável é expressa por seu valor instantâneo. Admitindo para simplificação que o conduto da Figura 19.1 não tem nem bomba nem trocador, resulta

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \int_t \left(\rho \frac{v_1^2}{2} + P_1 + \rho g h_1 + \rho c_v T_1 \right) \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1 dt \\ & - \int_{S_2} \int_t \left(\rho \frac{v_2^2}{2} + P_2 + \rho g h_2 + \rho c_v T_2 \right) \vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2 dt = \int_t \delta E dt. \end{aligned} \quad (20.7)$$

Integrando todos os termos em relação a um intervalo de tempo suficientemente longo para que o escoamento turbulento possa ser considerado “quasi-permanente” e dividindo por δt , resulta no segundo membro, $(\int_{\delta t} \delta E dt) / \delta t$, que pode ser considerado nulo. Portanto, a equação (19.5) é aplicável ao escoamento turbulento “quasi-permanente” quando as suas variáveis são expressas por seus valores médios temporais. As equações simplificadas (20.5) ou (20.6) podem ser usadas também nesse modelo de escoamento turbulento.

No escoamento em tubos comerciais o valor da componente flutuante da velocidade instantânea, mesmo longe da parede, onde o grau de liberdade é maior, é da ordem da centésima parte da velocidade média temporal. Conseqüentemente, o intervalo de tempo δt não precisa ser muito longo para que o escoamento turbulento seja considerado como escoamento “quasi-permanente”, com boa precisão.

As definições de linhas e tubos de corrente também podem ser aplicadas ao escoamento turbulento “quasi-permanente”, i.e., ao escoamento turbulento caracterizado pela velocidade média temporal que será, então, a velocidade tangente às linhas de corrente.

Referências

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 10, 1959.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons, Capítulo 8, 1960.

Equação da quantidade de movimento

A equação da quantidade de movimento que veremos a seguir e a da energia, que acabamos de estudar, são especialmente úteis nos problemas de escoamento de fluidos que não podem ser analisados pelas equações do movimento, i.e., pelas equações de Euler, no escoamento ideal, e pelas equações de Navier-Stokes no escoamento real, viscoso. Em muitos casos, essas equações ainda não podem ser integradas de modo a fornecer um resultado de aplicação prática. Nestas situações podemos empregar a equação da quantidade de movimento e a da energia, que são equações globais e que, baseadas somente em condições de contorno do sistema, fornecem resultados úteis. O uso dessas equações não exige o conhecimento do mecanismo interno do escoamento necessário à aplicação das equações do movimento.

Conservação da quantidade de movimento

A equação da quantidade de movimento pode ser deduzida combinando o princípio de conservação dessa grandeza extensiva (eq. 6.1) com a segunda lei de Newton. A segunda lei de Newton diz que a resultante das forças que atuam em um sistema é igual à taxa de variação de sua quantidade de movimento. Na expressão geral da conservação, a força resultante pode ser considerada como fonte ou sumidouro da quantidade de movimento, i.e.,

$$\text{força resultante} = \text{acumulação} + (\text{saída} - \text{entrada}). \quad (21.1)$$

Se o escoamento é permanente, a taxa de acumulação é nula e a força resultante é igual à taxa de saída menos a taxa de entrada de quantidade de movimento.

Devemos notar que a força resultante representa, na realidade, a soma das forças externas que atuam no sistema. As forças internas entre as partículas que constituem o sistema cancelam-se em obediência ao princípio da ação e reação (terceira lei de Newton).

Fluxo da quantidade de movimento

A quantidade de movimento é uma grandeza extensiva vetorial e o seu fluxo é representado por um tensor. Considerando-se o fluxo da quantidade de movimento por unidade de volume do fluido (“concentração” da quantidade de movimento), o tensor representativo desse fluxo tem os seguintes componentes cartesianos:

$$\begin{vmatrix} (\rho v_x)v_x & (\rho v_x)v_y & (\rho v_x)v_z \\ (\rho v_y)v_x & (\rho v_y)v_y & (\rho v_y)v_z \\ (\rho v_z)v_x & (\rho v_z)v_y & (\rho v_z)v_z \end{vmatrix}. \quad (21.2)$$

Nesta matriz, cada termo representa o fluxo de um componente da quantidade de movimento em uma das três direções cartesianas. Assim, $(\rho v_x)v_x$ representa o fluxo da componente x da quantidade de movimento na direção x do escoamento.

Consideramos a seguir a dedução da equação da quantidade de movimento por alguns métodos.

Equação da quantidade de movimento em um volume de controle fixo no espaço (Método de Euler)

Consideremos o escoamento na direção x através do volume de controle estacionário ilustrado na Figura 21.1. Os componentes v_y e v_z são nulos. A taxa de entrada correspondente ao fluxo do componente x da quantidade de movimento devida ao escoamento na direção x é dada por

$$\text{entrada} = (\rho v_x)v_x(\delta_y\delta_z), \quad (21.3)$$

enquanto a taxa de saída é expressa por

$$\text{saída} = \left\{ (\rho v_x)v_x + \frac{\partial[(\rho v_x)v_x]}{\partial x} \delta_x \right\} \delta_y \delta_z. \quad (21.4)$$

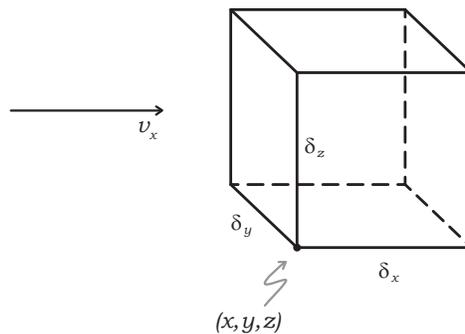


Figura 21.1

Portanto, o saldo de entrada é expresso por

$$\text{entrada} - \text{saída} = -\frac{\partial}{\partial x} [(\rho v_x)v_x] \delta_x \delta_y \delta_z. \quad (21.5)$$

A quantidade de movimento do volume de controle é $(\rho v_x)\delta_x\delta_y\delta_z$, portanto, a taxa de acumulação é dada por

$$\text{taxa de acumulação} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z. \quad (21.6)$$

Chamando de δF_x a força resultante que atua na direção x do escoamento de acordo com a segunda lei de Newton, temos

$$\text{fonte} - \text{sumidouro} = \delta F_x. \quad (21.7)$$

Substituindo as equações (21.5), (21.6) e (21.7) na expressão geral da conservação da quantidade de movimento, equação (21.1), resulta

$$\delta F_x = \left\{ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho v_x) v_x] \right\} \delta_x \delta_y \delta_z, \quad (21.8)$$

ou, expandindo as derivadas,

$$\delta F_x = \left[\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] \delta_x \delta_y \delta_z. \quad (21.9)$$

A equação da continuidade de massa no caso de volume de controle fixo, equação (6.10), fornece para um escoamento na direção x ,

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (21.10)$$

Portanto, a equação (21.9) pode ser expressa por

$$\frac{\delta F_x}{\delta_x} = \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) \delta_y \delta_z. \quad (21.11)$$

Apesar desta equação representar um caso simplificado de escoamento unidirecional, a sua integração ainda é difícil. Entretanto, no caso de escoamento permanente,

$$\frac{\delta F_x}{\delta_x} = (\rho v_x) \delta_y \delta_z \frac{dv_x}{dx}. \quad (21.12)$$

Levando em conta que $v_x \delta_y \delta_z$ é a vazão volumétrica Q que passa pela área da seção de escoamento, temos,

$$\frac{\delta F_x}{\delta_x} = \rho Q \frac{dv_x}{dx}. \quad (21.13)$$

Tomando o limite de $\delta F_x / \delta_x$ quando o volume de controle tende para o ponto (x, y, z) da Figura (21.1), resulta

$$dF_x = \rho Q dv_x, \quad (21.14)$$

onde dv_x representa a variação da velocidade na direção x provocada pela resultante das forças que atuam nessa mesma direção.

Equação da quantidade de movimento em um volume de controle móvel (Método de Lagrange)

Consideraremos um volume de controle de volume $\delta_s \delta_z$ que se move com o fluido na direção de x e que contém uma massa m constante de material. A área δ_s é uma área frontal ao escoamento. A segunda lei de Newton fornece a seguinte relação:

$$\delta F_x = \frac{D}{Dt}(m v_x) = m \frac{D v_x}{Dt}. \quad (21.15)$$

Como $v_x = v_x(x, t)$,

$$\frac{d v_x}{d t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{d x}{d t} + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad (21.16)$$

entretanto, como o volume de controle está se movendo com o fluido, $d x / d t = v_x$ e a equação (21.16) deve ser escrita

$$\frac{D v_x}{D t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad (21.17)$$

onde $v_x(\partial v_x / \partial x)$ é a derivada convectiva, $\partial v_x / \partial t$ a derivada local e $D v_x / D t$ a derivada substantiva. Considerando

$$m = \rho \delta_s \delta_x, \quad (21.18)$$

podemos exprimir a equação (21.15) do seguinte modo

$$\frac{\delta F_x}{\delta_x} = \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) \delta_s, \quad (21.19)$$

que é a expressão análoga à equação (21.11). No caso de escoamento permanente, esta equação pode ser simplificada para fornecer a equação (21.14).

Forma integral da equação da quantidade de movimento

Na dedução da forma integral da equação da continuidade, vimos que através da superfície S do volume de controle esquematizados na Figura 7.1 passa um saldo de vazão ponderal expresso pela equação (7.1)

$$(\text{saída} - \text{entrada})_{\text{massa}} = \int_S \rho v \cos \alpha dS. \quad (7.1)$$

A taxa de acumulação de massa no volume de controle é dada pela equação (7.2)

$$(\text{taxa de acumulação})_{\text{massa}} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (7.2)$$

As taxas de variação da componente x da quantidade de movimento correspondentes a essas taxas de variação de massa são dadas por

$$(\text{saída} - \text{entrada})_{\text{qm},x} = \int_S \rho v_x v \cos \alpha dS, \quad (21.20)$$

$$(\text{taxa de acumulação})_{\text{qm},x} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_x dV. \quad (21.21)$$

Levando em conta que, de acordo com a segunda lei de Newton, a força pode ser considerada como fonte ou sumidouro

$$\sum F_x = \int_S \rho v_x v \cos \alpha dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_x dV. \quad (21.22)$$

Se o escoamento é permanente, a força resultante que atua na direção x é dada por

$$\sum F_x = \int_S \rho v_x v \cos \alpha dS. \quad (21.23)$$

Nessas expressões, $\sum F_x$ representa a soma das forças externas que atuam na direção x . Como $v \cos \alpha dS = dQ$, a equação (21.23) pode ser expressa por

$$\sum F_x = \int_S \rho v_x dQ. \quad (21.24)$$

Referências

LONGWELL, P. A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 3, 1958.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 14, 1934.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 6, 1947.

Aplicação da equação da quantidade de movimento no tubo de corrente

Consideremos o escoamento permanente no tubo de corrente ilustrado na Figura 22.1, onde a seção de entrada é S_1 e a de saída S_2 . Podemos reescrever a equação (21.23) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \int_S \rho v_x \vec{v} \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{S_2} \rho_2 v_{x,2} v_2 \cos \alpha_2 dS_2 - \int_{S_1} \rho_1 v_{x,1} v_1 \cos \alpha_1 dS_1, \end{aligned} \quad (22.1)$$

onde α é o ângulo entre o vetor \vec{v} e o vetor \vec{n} normal a δS .

Na equação (22.1), $v \cos \alpha dS = dQ$, portanto

$$\sum F_x = \int \rho v_x dQ = \int_{S_2} \rho_2 v_{x,2} dQ_2 - \int_{S_1} \rho_1 v_{x,1} dQ_1, \quad (22.2)$$

onde dQ_1 é a vazão que entra em dS_1 e dQ_2 a vazão que sai em dS_2 .

Em muitos casos podemos escolher as seções de controle S_1 e S_2 de tal modo que nelas sejam constantes a massa específica ρ e a velocidade \vec{v} , tanto em módulo quanto em direção. Nesses casos, integrando a equação (22.2), obtemos

$$\sum F_x = \rho_2 u_{x,2} Q_2 - \rho_1 u_{x,1} Q_1, \quad (22.3)$$

onde chamamos de u_x a velocidade uniforme do escoamento unidirecional. Como o escoamento é permanente $\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q$, portanto,

$$\sum F_x = \rho Q (u_{x,2} - u_{x,1}). \quad (22.4)$$

Esta expressão pode também ser obtida diretamente por integração da equação (21.14) entre S_1 e S_2 , tomando $v_x = u_x$.

Considerando o escoamento uniforme nas direções y e z , temos, por processo análogo ao da direção x

$$\sum F_y = \rho Q (u_{y,2} - u_{y,1}). \quad (22.5)$$

$$\sum F_z = \rho Q (u_{z,2} - u_{z,1}). \quad (22.6)$$

Essas equações são válidas para o escoamento viscoso, tanto incompressível quanto compressível, pois ρQ representa a vazão mássica.

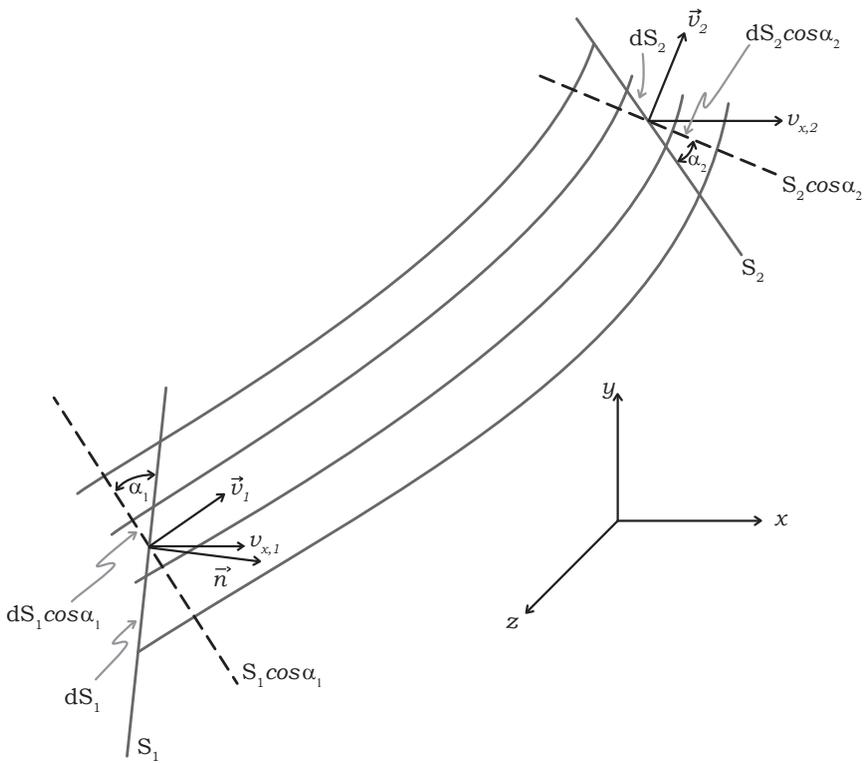


Figura 22.1

Correção do escoamento não uniforme

Nos tubos de corrente convergentes ou divergentes, ou no caso de escoamento viscoso em tubo de seção constante, a velocidade varia ao longo de qualquer seção. O emprego das equações (22.9) a (22.11) pode então ser corrigido por intermédio de um coeficiente semelhante ao usado na equação (19.13) para corrigir a energia cinética. Esse coeficiente é introduzido na equação (22.3), multiplicando a velocidade média u do seguinte modo

$$\sum F_x = \int_S \rho \psi u_x dQ = \rho_2 \psi_2 u_{x,2} Q_2 - \rho_1 \psi_1 u_{x,1} Q_1. \quad (22.7)$$

Comparando esta equação com a equação (22.1), admitindo ρ constante nas seções, vemos que

$$\int_S v_x v \cos \alpha dS = \psi u_x u \cos \alpha S. \quad (22.8)$$

Tirando o valor do coeficiente ψ , temos

$$\psi = \frac{1}{S} \int_S \frac{v}{u} \frac{v_x}{u_x} dS. \quad (22.9)$$

Podemos considerar que a razão constante entre os módulos da velocidade local e média v/u seja igual à razão entre os seus componentes na direção x , portanto

$$\psi = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{v}{u} \right)^2 dS. \quad (22.10)$$

A integração acima pode ser efetuada quando conhecemos o perfil de velocidade (ver equações (33.15) e (40.28)). No escoamento viscoso em dutos, $\psi = 4/3$ se o regime de escoamento for laminar e $\psi = 1,01$ a $1,05$, no caso de regime turbulento.

Representação vetorial

A equação vetorial da quantidade de movimento, cujo componente x é dado pelas equações (21.23) e (22.1), é a seguinte:

$$\sum \vec{F} = \int_S (\rho d\vec{S} \cdot \vec{v}) \vec{v}. \quad (22.11)$$

Os componentes y e z dessa equação são:

$$\sum F_y = \int_S \rho v \cos \alpha dS v_y, \quad (22.12)$$

$$\sum F_z = \int_S \rho v \cos \alpha dS v_z. \quad (22.13)$$

Quando a velocidade é uniforme e a massa específica é constante na seção S_1 de entrada e na seção S_2 de saída de um tubo de corrente

$$\int_S (\rho d\vec{S} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \rho Q (\vec{u}_2 - \vec{u}_1), \quad (22.14)$$

onde a taxa de entrada de quantidade de movimento $\rho Q u_1$ é negativa porque \vec{S}_1 e \vec{u}_1 tem direções contrárias (\vec{S}_1 é positivo de dentro para fora do volume de controle). Portanto, no caso de escoamento unidirecional uniforme:

$$\sum \vec{F} = \rho Q (\vec{u}_2 - \vec{u}_1). \quad (22.15)$$

As componentes x , y e z desta equação são dadas pelas equações (22.4) a (22.6). Esta equação pode ser posta na seguinte forma de equilíbrio dinâmico:

$$\sum F = \rho Q u_2 + \rho Q u_1 = 0, \quad (22.16)$$

onde $\rho Q u$ representa as forças de inércia ou fluxos de quantidade de movimento global.

Forças externas

O primeiro membro das equações (22.11) e (22.15), no caso de escoamento ideal, é constituído das seguintes forças externas ao volume de controle:

1. Forças de pressão que atuam na superfície de controle, expressas por

$$\text{forças de pressão} = - \int_S P d\vec{S}, \quad (22.17)$$

que são negativas porque atuam no sentido contrário ao da normal à área, que é dirigida positivamente para fora.

2. Forças de campo, principalmente a força gravitacional, dada por

$$\text{força gravitacional} = \int_V \rho \vec{g} dV. \quad (22.18)$$

3. Outras forças externas, $\sum \vec{F}_e$ que o fluido exerce em superfície de corpos rígidos imersos no fluido ou em paredes sólidas que envolvem o volume de controle e são nele incluídas. Essas forças poderiam ser incluídas como forças de pressão dadas pela equação (22.17), pois as superfícies de corpos ou de paredes envolventes podem ser consideradas como contornos do volume de controle que exercem pressão sobre o fluido. Entretanto, é conveniente separar essas forças. Assim, se a Figura 22.1 representa uma curva do duto, convém separar as forças de pressão que atuam normalmente nas superfícies S_1 e S_2 das forças que atuam na parede da curva.

Além dessas forças que atuam no escoamento ideal temos as forças viscosas, que atuam tangencialmente às superfícies de controle. Frequentemente podemos desprezar as forças viscosas nas aplicações da equação da quantidade de movimento ao escoamento real. Nesse caso, equação (22.11) pode ser reescrita como

$$\int_S (\rho d\vec{S} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \int_V \rho \vec{g} dV - \int_S P d\vec{S} + \sum \vec{F}_e. \quad (22.19)$$

No caso de escoamento uniforme nas seções de entrada S_1 e saída S_2 no tubo de corrente, a equação (22.15) pode ser expressa por

$$\rho Q(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) = \int_V \rho \vec{g} dV - P_2 \vec{S}_2 - P_1 \vec{S}_1 + \sum \vec{F}_e. \quad (22.20)$$

Em muitos casos a força gravitacional pode ser omitida, portanto,

$$\rho Q(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) = -P_2 \vec{S}_2 - P_1 \vec{S}_1 + \sum \vec{F}_e, \quad (22.21)$$

onde P representa a força normal de superfície.

Aplicação da equação da quantidade de movimento ao escoamento turbulento

As equações precedentes são válidas para o escoamento permanente, entretanto, apesar do escoamento turbulento ser, quanto aos elementos fluidos, um escoamento transiente, podemos ainda assim aplicá-las, desde que o escoamento turbulento seja considerado um escoamento quase-permanente. Neste caso podemos usar os valores médios temporais da velocidade e da pressão.

Referências

STREETER, V.L. *Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 3, 1958.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 14, 1934.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co, Capítulo 4, 1947.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons, Capítulo 9, 1960.

Aplicações das equações de energia, quantidade de movimento e continuidade

Reações de uma curva de duto

O corpo livre ou volume de controle ilustrado na Figura 23.1a inclui a parede do duto, para que a reação dessa parede seja uma das forças externas que atua no volume de controle. O volume é então limitado pelas seções S_1 e S_2 e pela parede da curva.

Na Figura 23.1b mostramos a composição dos diversos vetores que representam as diversas forças externas que atuam no volume de controle, bem como a composição das velocidades. É óbvio que a resultante das forças $\Sigma \vec{F}$ e das velocidades $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ têm a mesma direção. Na Figura 23.1c mostramos graficamente o equilíbrio dinâmico expresso pela equação (22.16).

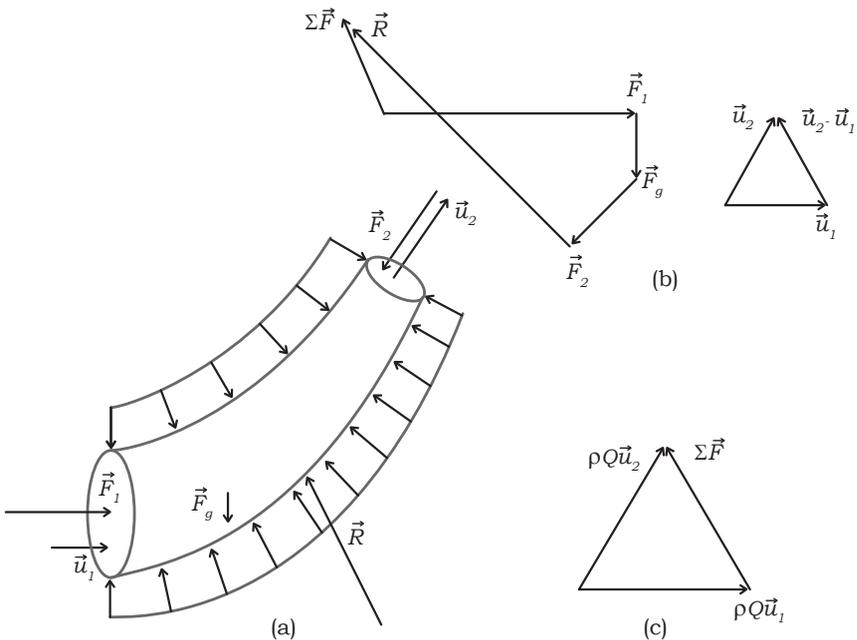


Figura 23.1

Para simplificar a aplicação da equação da quantidade de movimento, coloquemos a curva no plano x, y , horizontal, com a seção S normal à direção x (Fig. 23.2). No plano x, y os componentes da força gravitacional são nulos.

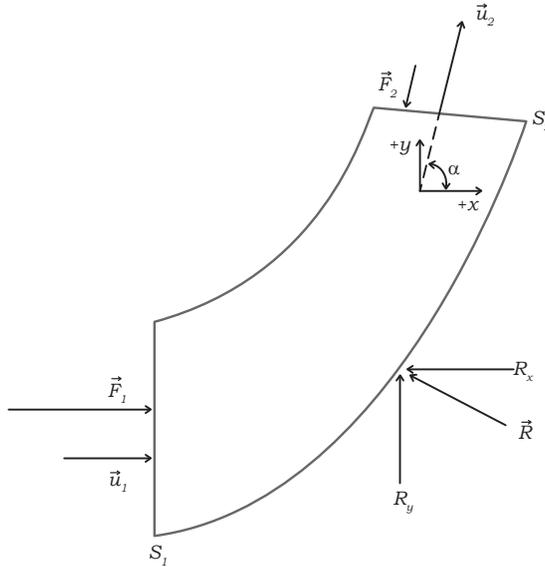


Figura 23.2

As forças que atuam no fluido na direção x são

$$\sum F_x = P_1 S_1 - P_2 S_2 \cos \alpha - R_x = \rho Q (u_2 \cos \alpha - u_1), \quad (23.1)$$

enquanto na direção y

$$\sum F_y = -P_2 S_2 \sin \alpha + R_y = \rho Q u_2 \sin \alpha. \quad (23.2)$$

Portanto, as reações são expressas por

$$R_x = P_1 S_1 - P_2 S_2 \cos \alpha + \rho Q (u_1 - u_2 \cos \alpha), \quad (23.3)$$

$$R_y = P_2 S_2 \sin \alpha + \rho Q u_2 \sin \alpha. \quad (23.4)$$

No caso de escoamento ideal, incompressível, irrotacional, podemos aplicar a equação de Bernoulli entre as seções S_1 e S_2 , i.e.,

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (23.5)$$

A equação da continuidade diz que

$$u_1 S_1 = u_2 S_2. \quad (23.6)$$

Este conjunto de expressões é usado para resolver problemas no cálculo das reações em curvas de dutos.

Alargamento brusco em tubulação

O problema é calcular a perda de carga no escoamento incompressível através de um alargamento brusco esquematizado na Figura 23.3. Admitimos que nas seções 1 e 2 as linhas de corrente são paralelas à parede do conduto e aplicamos as equações de conservação ao corpo livre isolado na Figura 23.3b.

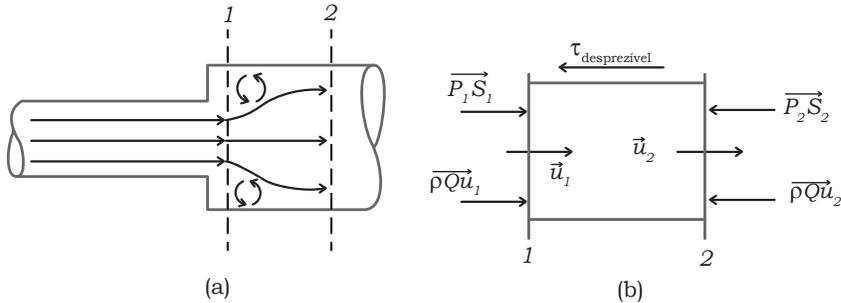


Figura 23.3

a) Conservação de massa. No caso de escoamento permanente, a vazão que entra na seção S_1 , $u_1 S_1$, é igual à que sai por S_2 , $u_2 S_2$, i.e.,

$$u_1 / u_2 = S_2 / S_1. \quad (23.7)$$

b) Conservação da quantidade de movimento. Aplicamos a equação (22.15) ao volume de controle da Figura 23.3b. Desprezando o atrito de superfície entre as seções 1 e 2 e levando em conta que o componente da gravidade na direção do escoamento é nulo, a força resultante $\sum \vec{F}$ é simplesmente $S_2(P_1 - P_2)$, portanto

$$S_2(P_1 - P_2) = \rho u_2 S_2 (u_2 - u_1), \quad (23.8)$$

$$(P_1 - P_2) / \rho = u_2 (u_2 - u_1). \quad (23.9)$$

Deste modo podemos calcular a queda de pressão sem o conhecimento dos choques que ocorrem no interior do volume de controle.

Vemos que $P_2 > P_1$ porque $u_1 > u_2$ entretanto, o aumento de pressão na direção do escoamento não é tão grande como seria no caso em que o aumento da área fosse gradativo (por meio de um difusor) diminuindo, deste modo, as “perdas” devidas à turbulência introduzida pela expansão brusca (resistência de forma).

c) Conservação da energia. Aplicando ao caso a equação (20.6), levando em conta que $h_1 = h_2$ e tirando o valor da perda de carga, temos,

$$h_a = \frac{1}{g} \left(\frac{P_1 - P_2}{\rho} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \right). \quad (23.10)$$

Eliminando $(P_1 - P_2)/\rho$ com o auxílio da equação (23.9) e u_2 por meio da equação (23.7), resulta,

$$h_a = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} = \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2. \quad (23.11)$$

Se S_2 for suficientemente maior que S_1 a perda de carga será praticamente igual à carga de velocidade de entrada no volume de controle.

Neste problema desprezamos o atrito de superfície de modo que h_a inclui somente as perdas devidas à resistência de forma, que são associadas com o turbilhonamento produzido pela forma da parede sólida em contato com o escoamento (alargamento brusco). Na realidade, a resistência de superfície é muito pequena porque as seções 1 e 2 estão próximas uma da outra.

d) Influência do difusor. Se o alargamento da área S_1 é feito gradativamente até a área S_2 , enquanto a pressão aumenta de P_1 até P_2 , podemos aplicar a equação de Bernoulli e tirar o valor

$$P'_2 - P_1 = \frac{\rho}{2} (u_1^2 - u_2^2). \quad (23.12)$$

Comparando esta expressão com o valor de $P_2 - P_1$ no caso do alargamento brusco, equação (23.9), vemos que

$$P'_2 - P_2 = \frac{\rho}{2} (u_1 - u_2)^2, \quad (23.13)$$

i.e., de fato, $P'_2 > P_2$.

Ejetor

A Figura 23.4 esquematiza uma bomba a jato ou ejedor que usa um fluido com carga elevada para acionar um fluido de carga baixa. Consideremos o caso de um injetor de água (escoamento incompressível):

$$\text{carga do jato} = h_j = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_j^2}{2g}. \quad (23.14)$$

$$\text{carga na sucção} = h_s = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_s^2}{2g}. \quad (23.15)$$

Admitamos que na seção 2 a mistura dos dois fluidos é completa; neste caso:

$$u_j S_j + u_s S_s = u_2 S_2. \quad (23.16)$$

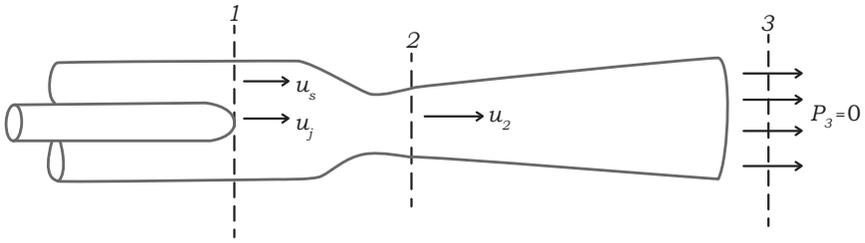


Figura 23.4

$$u_2 = u_j \frac{S_j}{S_2} + u_s \frac{S_s}{S_2} \quad (23.17)$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento entre as seções S_1 e S_2 , temos

$$(P_1 - P_2)S_2 = \rho u_2^2 S_2 - \rho u_j^2 S_j - \rho u_s^2 S_s, \quad (23.18)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = u_2^2 - u_j^2 \frac{S_j}{S_2} - \frac{S_s}{S_2} u_s^2. \quad (23.19)$$

Aplicando a conservação de energia entre as seções 2 e 3, temos

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = \frac{P_3}{\rho g} + h_a. \quad (23.20)$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} - h_a = h_r, \quad (23.21)$$

onde h_r é a carga de recalque do injetor e h_a é a perda de carga no difusor.

Definindo como eficiência do difusor e_d , a relação entre a recuperação real de pressão e a recuperação máxima teórica, temos

$$e_d = \frac{P_3 - P_2}{P'_3 - P_2} = \frac{(u_2^2/2g) - h_a}{u_2^2/2g}, \quad (23.22)$$

onde P'_3 é a pressão máxima teórica. Segue-se que a equação (23.21) pode ser expressa por

$$h_r = \frac{P_2}{\rho g} + e_d \frac{u_2^2}{2g}. \quad (23.23)$$

Conhecidas as três cargas h_s , h_j e h_r e as três áreas S_s , S_2 e S_j , podemos calcular u_s , u_j , u_2 , P_1 e P_2 com o auxílio das equações (23.17), (23.21), (23.22) e (23.23).

Referências

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 2, 1957.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 9, 1934.

Balço de carga no escoamento real

Consideremos o trecho de um escoamento que não inclui bomba ou trocador de calor (Fig. 24.1). Entre as seções S_1 e S_2 podemos aplicar a equação (20.6) da conservação de energia, i.e.,

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2 + h_a. \quad (20.6)$$

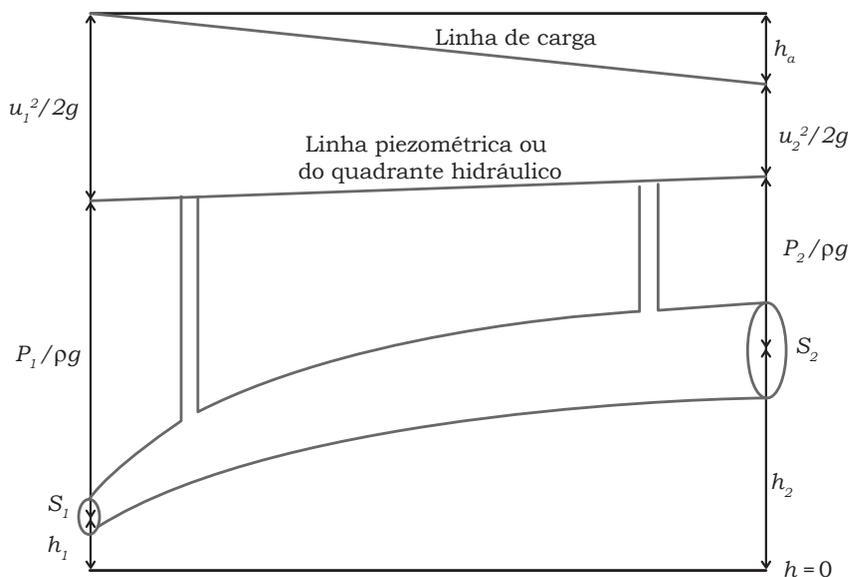


Figura 24.1

Na Figura 24.1, a linha de carga representa a variação de $(u^2/2g) + (P/\rho g) + h$ ao longo do duto. A perda de carga h_a é representada pelo afastamento entre a linha de carga total e a linha de carga. É evidente que a linha de carga deve cair na direção do escoamento, a não ser quando o fluido recebe a carga de uma bomba. A linha piezométrica ou do gradiente hidráulico representa a variação de $(P/\rho g) + h$ com o comprimento do tubo. Esta linha pode descer ou subir, dependendo da variação de cota e da área da seção do tubo. O nível do líquido em tubos piezométricos dispostos pelo comprimento do duto

varia ao longo da linha piezométrica. Vemos também que a linha piezométrica situa-se sempre abaixo da linha de carga; a separação dada por $u_2^2/2g$ é a chamada carga cinética.

Interpretação da carga de pressão

A carga de pressão, ao contrário das outras cargas, não representa propriamente uma energia que o fluido “possua” por unidade de peso. Isto porque o aumento de pressão em um fluido incompressível não “confere” ao fluido nenhuma energia apreciável, pois a energia é o produto da força aplicada pelo deslocamento sofrido na direção da força e, no caso de líquidos, a compressibilidade é mínima. A carga $P/\rho g$ representa na realidade o trabalho requerido para empurrar uma unidade de peso do fluido através de uma seção no duto (Fig. 24.2). A energia para empurrar uma unidade de peso do líquido que ocupa o comprimento L do tubo é dada por: $FL = PSL = PV$ ou, como V é o volume por unidade de peso do líquido em escoamento, a energia para empurrar é dada por $P/\rho g$. Vemos que a energia (ou carga) de escoamento seria uma melhor denominação para $P/\rho g$.

Valor da carga cinética

Nos problemas de transporte de líquidos em encanamentos, a carga cinética pode usualmente ser desprezada. A velocidade comum no transporte de líquidos de viscosidade próxima à viscosidade da água é da ordem de 3m/s, portanto, $u^2/2g = 9/20 = 0,45m$. Este valor é muito pequeno em comparação ao valor que as cargas de pressão, potencial ou mesmo a perda de carga podem alcançar.

Cálculo da potência de uma bomba

A equação da conservação da energia encontra uma aplicação importante no cálculo da potência do motor de uma bomba necessária para um dado serviço. Temos duas maneiras de efetuar este cálculo:

a. Incluindo a bomba no esquema ilustrado na Figura 24.3 e empregando a equação (20.5), temos

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_1 + W_u = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_2 + h_a, \quad (24.1)$$

onde W_u representa a carga útil da bomba, i.e., a energia cedida pela bomba por unidade de peso do fluido em escoamento. Esta carga vale: $P_u/Q\rho g$, portanto, a potencial útil é expressa por

$$P_u = W_u Q \rho g. \quad (24.2)$$

Para que se tenha o valor de W através da equação (24.1) é necessário conhecer a perda de carga h_a entre as seções 1 e 2 do encanamento. Essa perda inclui as perdas devidas à resistência de superfície e as perdas devidas à resistência de forma.

Em tubos retos suficientemente longos predominam a resistência de superfície, ao passo que nas tubulações acidentadas com curvas, reduções, válvulas, etc., predominam a resistência de forma. Os métodos empíricos usados para a avaliação das “perdas” serão vistos mais adiante.

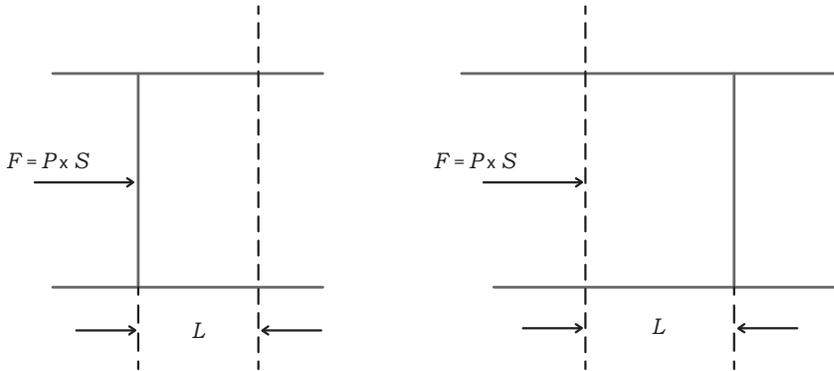


Figura 24.2

Conhecida a eficiência ou o rendimento da bomba e_B , podemos calcular o valor da potência motora, P_m correspondente à energia cedida pelo motor à bomba, através da relação

$$P_m = P_u / e_B. \quad (24.3)$$

A determinação da potência do motor, P_M , deve incluir também a eficiência do motor e_M , i.e.,

$$P_M = P_m / e_M. \quad (24.4)$$

No caso da bomba ser acionada por motor elétrico, a determinação do consumo de energia elétrica deve incluir o fator de potência de corrente.

b. Excluindo a bomba do sistema e calculando separadamente as pressões de sucção P_S e de recalque P_R , temos,

$$\frac{P_S}{\rho g} = \left(\frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_1 \right) - \left(\frac{u_S^2}{2g} + h_s + h_{a,S} \right), \quad (24.5)$$

$$\frac{P_R}{\rho g} = \left(\frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_2 + h_{a,R} \right) - \left(\frac{u_R^2}{2g} + h_R \right). \quad (24.6)$$

Levando em conta que a perda total h_a é a soma da perda de carga no encanamento de sucção $h_{a,S}$ com a do encanamento do recalque $h_{a,R}$ e substituindo os valores das cargas nas seções 1 e 2, dadas por essas expressões, na equação (24.1), resulta,

$$W_u = \frac{P_R - P_S}{\rho g} + \frac{u_R^2 - u_S^2}{2g} + h_R - h_S. \quad (24.7)$$

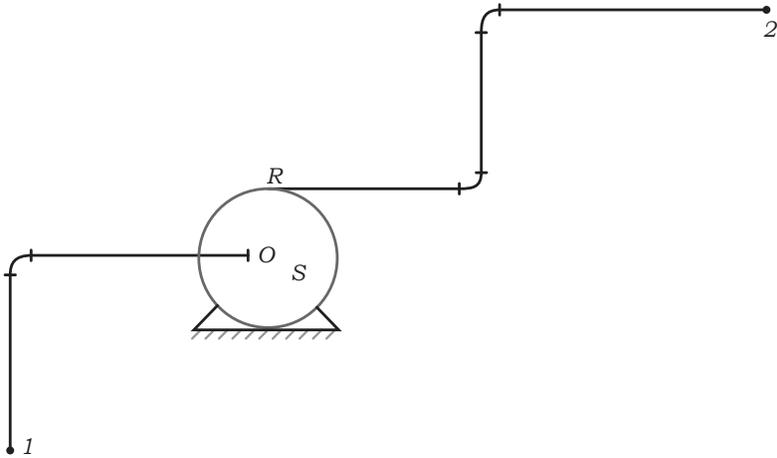


Figura 24.3

Desprezando as diferenças entre as cargas cinéticas e entre as cotas de sucção e recalque temos, com boa precisão,

$$W_u = \frac{P_R - P_S}{\rho g}, \quad (24.8)$$

onde os valores das pressões de recalque e sucção são dados, respectivamente, pelas equações (24.6) e (24.5) e exigem o conhecimento de $h_{a,R}$ e $h_{a,S}$. Com a bomba em funcionamento, entretanto, podemos efetuar as leituras de P_R e P_S em manômetros convenientemente instalados e com esses valores calcular a potência útil.

Esse segundo método deve ser preferido porque fornece os valores das pressões de recalque e sucção que, principalmente este último, são úteis para a escolha da bomba para um dado serviço.

Uma vez calculada a carga útil pela equação (24.8) as diversas potências podem ser determinadas pelas equações (24.2), (24.3) e (24.4).

Distinção entre queda e perda de pressão (ou carga)

A queda de carga é definida a partir da equação (20.6), i.e.,

$$\frac{P_1 - P_2}{g\rho} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + h_2 - h_1 + h_a. \quad (24.9)$$

Desta expressão tiramos o valor da queda de pressão correspondente que é dado por

$$P_1 - P_2 = \left[\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(h_2 - h_1) + gh_a \right] \rho. \quad (24.10)$$

Quando $u_2 = u_1$ e $h_2 = h_1$ ou, quando $(u_2^2/2g) + h_2 = (u_1^2/2g) + h_1$, as duas equações precedentes mostram que

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = h_a, \quad (24.11)$$

i.e., somente nestes casos particulares que a perda é igual à queda. Na prática, a perda é igual à queda quando nas seções 1 e 2 da tubulação as cotas e os diâmetros têm o mesmo valor.

É claro que $P_1 - P_2/\rho g$ representará sempre a perda de carga por atrito de um escoamento uniforme ($u_1 = u_2$), mesmo que haja diferença de cotas entre as seções 1 e 2.

Impacto de um jato

A Figura 24.4 mostra o impacto de um jato horizontal (direção x) de encontro a uma parede vertical (direção y).

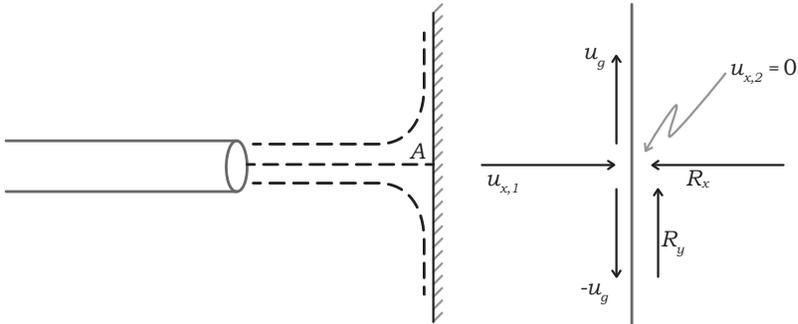


Figura 24.4

A equação (22.4) fornece a seguinte expressão:

$$R_x = -\rho Q u_{x,1}. \quad (24.12)$$

Esta expressão pode ser comparada com a equação (18.3) deduzida do teorema de Bernoulli. O ponto A da Figura 24.4 é um ponto de estagnação.

No caso em que o jato impinge em uma *parede inclinada* (Fig. 24.5), podemos calcular as vazões Q_1 e Q_2 do seguinte modo: desprezando a perda por atrito com a parede e a diferença de cotas, a equação da energia (20.6) mostra que as vazões resultantes do jato, Q_1 e Q_2 , são de mesmo módulo. Aplicando a equação da quantidade de movimento na direção inclinada da parede, temos,

$$\sum F = 0 = \rho Q u \cos \alpha + \rho Q_2 u - \rho Q_1 u, \quad (24.13)$$

$$Q \cos \alpha = Q_1 - Q_2. \quad (24.14)$$

Essa última expressão, em combinação com a expressão de continuidade $Q = Q_1 + Q_2$, fornece os valores de Q_1 e Q_2 :

$$Q_1 = \frac{Q}{2}(1 + \cos \alpha), \tag{24.15}$$

$$Q_2 = \frac{Q}{2}(1 - \cos \alpha). \tag{24.16}$$

A força que o fluido exerce na placa deve ser normal a ela e pode ser determinada a partir da equação da quantidade de movimento na direção normal à placa

$$-R = \rho Q u \sin \alpha. \tag{24.17}$$

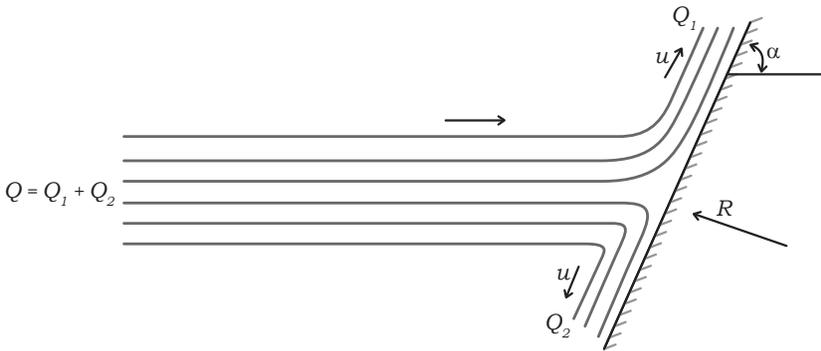


Figura 24.5

Referências

STREETER, V.L. *Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 3, 1958.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 4, 1957.

Jato desviado por uma superfície fixa

A Figura 25.1 mostra o desvio de um jato provocado por uma palheta fixa. Haverá uma variação de direção do vetor velocidade e consequente produção de força que atua na palheta. A teoria das turbinas é baseada no acionamento de palhetas por meio de jatos, enquanto em bombas, ao contrário, o fluido é acionado por palhetas.

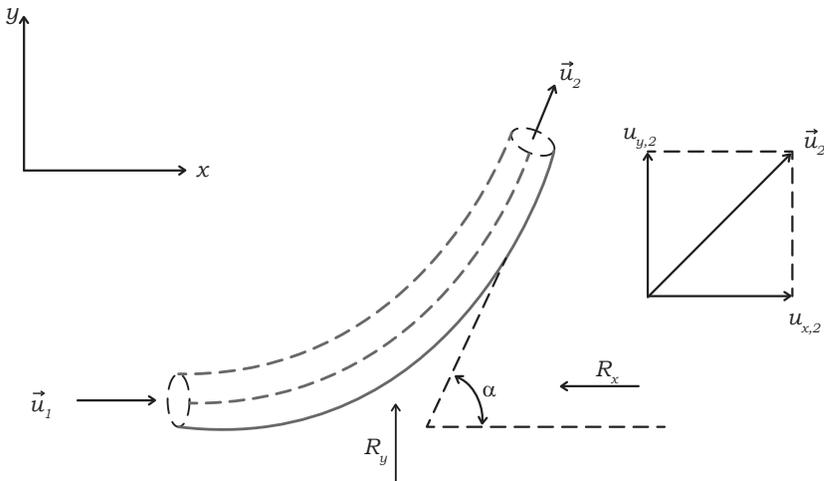


Figura 25.1

Admitimos que o jato com velocidade u_1 é tangente ao bordo de ataque da palheta curva, de modo que o ataque é feito sem choque. Desprezamos tanto as perdas por atrito quanto a diferença de cotas. Portanto, de acordo com a equação da conservação de energia, $u_1 = u_2$ (em módulo). Aplicando ao problema a equação da quantidade de movimento, temos,

$$-R_x = \rho Q(u_{x,2} - u_{x,1}), \quad (25.1)$$

$$R_x = \rho Q u_1 (1 - \cos \alpha), \quad (25.2)$$

$$R_y = \rho Q u_1 \sin \alpha, \quad (25.3)$$

onde R_x e R_y são as componentes da reação \vec{R} (força que a palheta exerce sobre o fluido).

No caso de palheta fixa há uma força atuante, porém não há produção de energia, porque o deslocamento da palheta na direção da força é nulo.

Jato desviado por palheta móvel

Vejam, inicialmente, os conceitos de velocidade absoluta e velocidade relativa. Chamamos de velocidade absoluta a velocidade em relação à terra e de velocidade relativa a velocidade de um corpo em relação a outro corpo, que pode estar em movimento em relação à terra. A Figura 25.2 mostra o deslocamento da ponte rolante (corpo 1) com velocidade absoluta $\vec{u}_{a,1}$ e o deslocamento da cabine (corpo 2) com velocidade relativa $\vec{u}_{r,2}$. A velocidade absoluta de um corpo, no caso da cabine, corpo 2, é a soma vetorial de sua velocidade relativa a um outro corpo (ponte rolante, corpo 1) com a velocidade absoluta deste, i.e.,

$$\vec{u}_{a,1} = \vec{u}_{a,2} + \vec{u}_{r,1}.$$

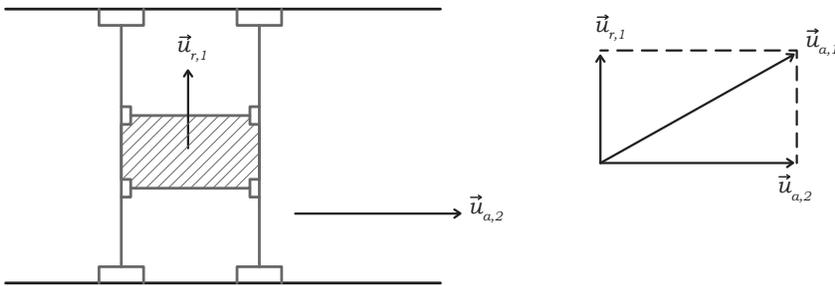


Figura 25.2

Consideramos que o ataque do jato com a palheta móvel (velocidade u_p) se dá sem choques e que podemos desprezar no escoamento o atrito e a diferença de cotas (Fig. 25.3).

O jato ataca a palheta com velocidade relativa $\vec{u}_1 - \vec{u}_p$ cujo módulo é observado até o bordo de fuga, mas cuja direção é desviada segundo o ângulo α . A velocidade absoluta de fuga do jato, \vec{u}_2 , é a resultante da velocidade relativa $\vec{u}_1 - \vec{u}_p$ com a velocidade absoluta da palheta \vec{u}_p . Os componentes cartesianos u_2 são expressos por (ver Fig. 25.3).

$$u_{x,2} = u_p + (u_1 - u_p) \cos \alpha, \tag{25.4}$$

$$u_{y,2} = (u_1 - u_p) \sen \alpha. \tag{25.5}$$

Da vazão $Q = u_1 S$ que sai do bocal do jato, somente uma parte, $Q' = (u_1 - u_p) S$, passa pela palheta defletora, portanto,

$$Q' = Q(u_1 - u_p) / u_1. \tag{25.6}$$

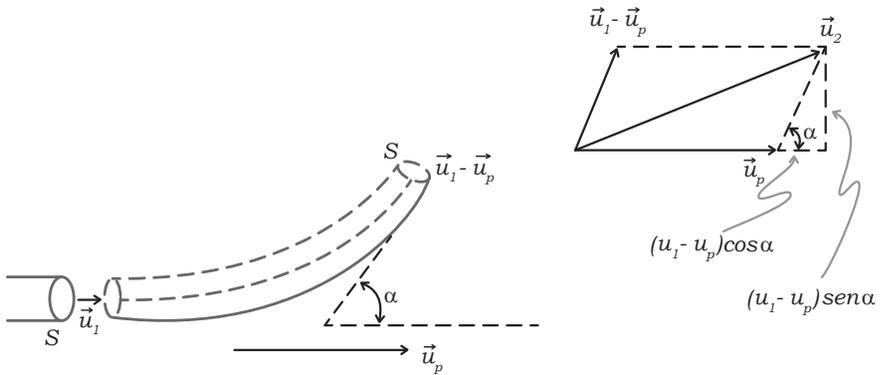


Figura 25.3

As reações R_x e R_y podem ser obtidas a partir da equação da quantidade de movimento, i.e.,

$$\begin{aligned}
 -R_x &= Q' \rho [u_p + (u_1 - u_p) \cos \alpha - u_1], \\
 R_x &= Q \rho \frac{(u_1 - u_p)^2}{u_1} (1 - \cos \alpha), \tag{25.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_y &= Q' \rho (u_1 - u_p) \sin \alpha, \\
 R_y &= Q \rho \frac{(u_1 - u_p)^2}{u_1} \sin \alpha. \tag{25.8}
 \end{aligned}$$

As equações (25.7) e (25.8) foram deduzidas a partir das velocidades absolutas de ataque e fuga. Essas velocidades são anotadas por um observador estacionário em relação à terra. É claro que o mesmo resultado deve ser obtido quando empregamos as velocidades anotadas por um observador fixo na palheta móvel, que só pode observar as velocidades relativas de ataque e fuga. Para este observador as variações dos componentes x e y das velocidades são dadas, respectivamente, por

$$(u_{x,1})_{rel.} = u_1 - u_p, \tag{25.9}$$

$$(u_{x,2})_{rel.} = (u_1 - u_p) \cos \alpha, \tag{25.10}$$

$$(u_{y,1})_{rel.} = 0, \tag{25.11}$$

$$u_{y,2} = (u_1 - u_p) \sin \alpha. \tag{25.5}$$

Substituindo esses valores dos componentes de ataque e fuga da velocidade \vec{u} nos componentes x e y da equação (22.16), resulta

$$-R_x = Q' \rho [(u_1 - u_p) \cos \alpha - (u_1, u_p)],$$

$$R_x = Q \rho \frac{(u_1 - u_p)^2}{u_1} (1 - \cos \alpha), \quad (25.7)$$

$$R_y = Q' \rho (u_1 - u_p) \operatorname{sen} \alpha,$$

$$R_y = Q \rho \frac{(u_1 - u_p)^2}{u_1} \operatorname{sen} \alpha, \quad (25.8)$$

i.e., o mesmo resultado obtido com as velocidades absolutas. A velocidade relativa de fuga na direção y é idêntica à absoluta porque não há movimento da palheta na direção y .

Jato desviado por uma série de palhetas móveis

Para que a energia do jato possa ser eficientemente aproveitada, podemos desviar a vazão do jato por uma série de palhetas convenientemente espaçadas na periferia de uma roda (Fig. 25.4). É o caso da turbina Pelton, que é um tipo de turbina de impulso. Deste modo, toda a vazão que sai do bocal do jato, Q , é desviada pelo sistema.

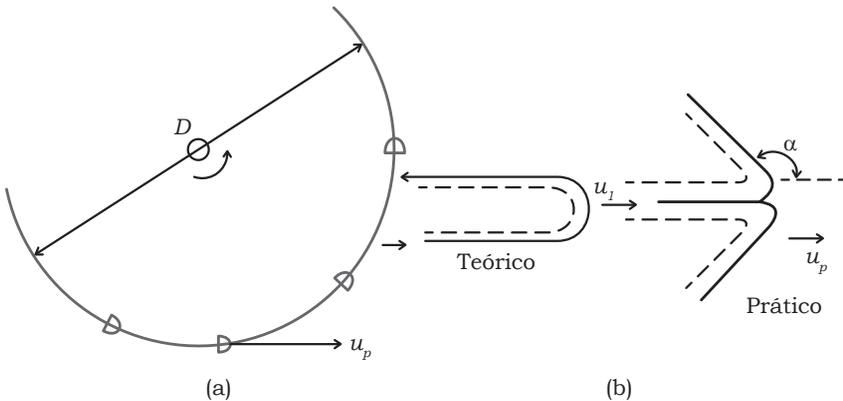


Figura 25.4

A força exercida pelo jato nas palhetas, na direção do movimento, é dada por

$$R = Q \rho (u_1 - u_p) (\cos \alpha - 1), \quad (25.12)$$

i.e., é uma força negativa, pois convencionamos considerar positiva a reação. Nesta expressão, α é o ângulo segundo o qual o jato é desviado pelas palhetas.

A energia cedida pelo jato às palhetas é igual ao produto da força pelo deslocamento na direção da atuação da força. Portanto, a energia por unidade de tempo, ou potência útil, conferida à roda é dada por

$$P_u = R u_p = \rho Q u_p (u_1 - u_p) (\cos \alpha - 1). \quad (25.13)$$

Esta expressão mostra que, para dadas condições do jato i.e., para dada vazão mássica ρQ e velocidade do jato u_1 , a potência útil depende da velocidade de deslocamento da palheta u_p e do ângulo de desvio do jato α . Quanto ao ângulo, o maior valor de P_u ocorre quando o desvio é de 180° e, quanto a u_p , $dP_u/d u_p = 0$ fornece

$$u_{p,potmax} = \frac{u_1}{2}. \quad (25.14)$$

Entretanto, por intermédio da equação (25.4), vemos que o valor de $u_{x,2}$ se anula quando, ao mesmo tempo, $u_p = u_1/2$ e $\alpha = 180^\circ$. Segue-se que esses valores da velocidade linear da turbina e do ângulo de desvio são valores teóricos.

Na prática, costuma-se tomar α próximo de 165° (Fig. 25.4b) e a velocidade periférica da turbina com um valor cerca de 48% da do jato. Tomando $u_p = u_1/2$, temos, para a rotação ótima,

$$N_{ótima} = \frac{u_1}{2\pi D}, \quad (25.15)$$

onde D é o diâmetro da turbina.

Referências

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 4, 1957.

KENYON, R.A. *Principles of Fluid Mechanics*, The Ronald Press Co., Capítulo 7, 1960.

Propulsão a hélice

Consideremos uma hélice girando em uma posição fixa, sendo impactada por uma corrente de fluido (Fig. 26.1). A uma certa distância a montante, a corrente fluida não é afetada pelo movimento da hélice; nesta altura a velocidade é uniforme e igual a u_a e a pressão ambiente é P_a . Na hélice a pressão sofre um aumento de P'_1 para P_1 e a velocidade é u_1 ; a hélice varre um disco de diâmetro D_1 . A uma certa distância a jusante a pressão da corrente varrida pela hélice volta a ser P_a , enquanto a velocidade é u_2 . Na Figura 26.1b mostramos as variações de pressão e de velocidade sofridas pela corrente de ar que varre o disco da hélice.

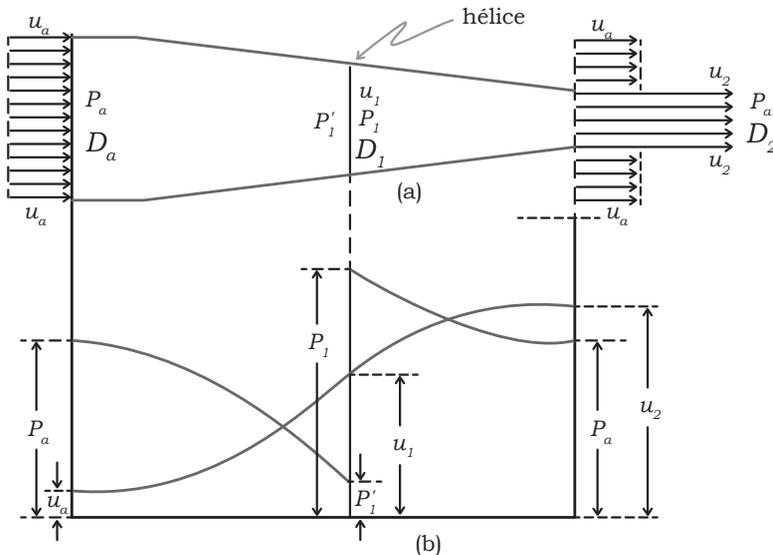


Figura 26.1

De acordo com a equação da quantidade de movimento, a força exercida pela corrente de ar na hélice é dada por

$$F = \rho Q(u_2 - u_a) = (\pi D_1^2 / 4) u_1 \rho (u_2 - u_a). \tag{26.1}$$

Por outro lado, a equação da conservação da energia fornece as seguintes expressões:

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{u_a^2}{2} = \frac{P'_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2},$$

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2}, \quad (26.2)$$

$$P_1 - P'_1 = (\rho/2)(u_2^2 - u_a^2),$$

portanto, a força F tem também o seguinte valor:

$$F = (\pi D_1^2/8)\rho(u_2^2 - u_a^2). \quad (26.3)$$

Igualando as equações (26.1) e (26.3), resulta,

$$u_1 = (u_2 + u_a)/2, \quad (26.4)$$

ou seja, o aumento de velocidade está igualmente dividido pela hélice, metade a montante e metade a jusante.

A energia “absorvida” pela hélice na unidade de tempo (potência útil) é dada por

$$P_u = Fu_1 = (\pi D_1^2/8)\rho u_1(u_2^2 - u_a^2). \quad (26.5)$$

Esta expressão mostra que a hélice “absorve” a diferença entre as energias cinéticas das duas extremidades da corrente de ar varrida pela hélice, onde a pressão é ambiente.

A eficiência da hélice pode ser representada pela razão entre a energia cedida pela hélice ao fluido para que possa avançar com a velocidade u_a e a energia “absorvida” para este fim:

$$e = \frac{Fu_a}{Fu_1} = \frac{u_a}{u_1} = \frac{2u_a}{u_2 + u_a}. \quad (26.6)$$

Chamando $u_2 - u_a$ de Δu , temos, $u_1 = u_a + (\Delta u/2)$ e,

$$e = \frac{u_a}{u_a + \frac{\Delta u}{2}}, \quad (26.7)$$

portanto, a eficiência da hélice é máxima quando o aumento da velocidade $u_2 - u_a$ é mínimo. A eficiência real de hélices de avião é da ordem de 85%, mas este valor cai bastante quando a velocidade do avião ultrapassa 600km/h, por causa dos efeitos da compressibilidade do ar. A eficiência real de hélice de navio é da ordem de 60% por causa de seu menor diâmetro, o que torna as “perdas” de energia por efeito das pontas relativamente importante.

Na presente análise consideramos escoamento unidimensional com velocidade uniforme u . Em hélices pequenas o efeito das pontas é importante e o escoamento tem que ser analisado tridimensionalmente.

Propulsão a jato

A força propulsora pode ser produzida em um motor de foguete ou em um motor a jato. Em ambos é um jato de gases o responsável pela propulsão. O *foguete* esquematizado na Figura 26.2 leva no seu bojo tanto o combustível (sólido ou líquido) quanto o comburente (oxigênio) para a combustão. A grande quantidade de gases produzidos na combustão é descarregada para o ambiente, com alta velocidade, através de um bocal de descarga. A montante da seção de descarga do bocal a pressão dos gases P_j é usualmente maior do que a pressão ambiente P_a , portanto, a força exercida pelo jato de gás no foguete é dada por

$$F = \rho_j Q_j u_j + (P_j - P_a) S_j. \quad (26.8)$$

Nesta expressão, $\rho_j Q_j u_j$ é o fluxo de quantidade de movimento através do bocal de descarga e $(P_j - P_a) S_j$ é a resultante das forças de pressão no bocal. Esta expressão mostra que quando os gases descarregam no vácuo, a força desenvolvida pelo motor do foguete é máxima.

Deste modo, vemos que é possível calcular a força exercida pelo jato de gases sem o conhecimento dos detalhes do mecanismo interno do foguete.



Figura 26.2

O *motor a jato*, por outro lado, leva em seu bojo o combustível mas retira da atmosfera o ar de combustão. Admitamos que o sistema de jato ilustrado na Figura 26.3 está parado enquanto o ar circula com a velocidade absoluta (em relação à terra) do sistema.

Então, o ar entra no sistema com velocidade u_a (em relação ao sistema em repouso), passa por um compressor e entra na câmara de combustão. O ar mais os gases de combustão, altamente aquecidos, descarregam para a atmosfera através de um bocal de descarga dirigido para trás do sistema. A velocidade de descarga em relação ao sistema estático é u_j .

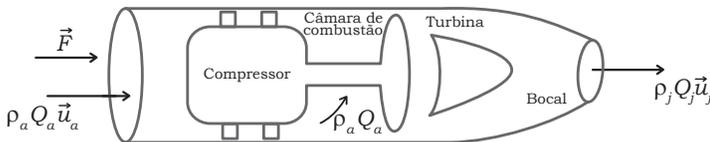


Figura 26.3

Ao contrário do foguete, a pressão de descarga dos gases é usualmente igual à pressão atmosférica, portanto, a força que os gases exercem no sistema é dada simplesmente

pela taxa de variação de quantidade de movimento dos gases que entram e saem do sistema, isto é,

$$F = \rho_j Q_j u_j - \rho_a Q_a u_a. \quad (26.9)$$

Em regime permanente, a vazão mássica $\rho_j Q_j$ dos gases de descarga é constituída da vazão mássica do ar que entra $\rho_a Q_a$ mais a vazão mássica do combustível injetado, $\rho_c Q_c$, isto é,

$$\rho_j Q_j = \rho_a Q_a + \rho_c Q_c. \quad (26.10)$$

Comumente a massa de combustível consumida por unidade de tempo é uma pequena fração da massa descarregada no jato, portanto, com pouco erro, podemos usar $\rho_j Q_j = \rho_a Q_a$. Segue-se que a força do motor a jato pode ser calculada por

$$F = \rho_a Q_a (u_j - u_a). \quad (26.11)$$

Nesta expressão, u_a pode ser considerada como a velocidade absoluta do sistema de jato.

Referências

KENYON, R.A. *Principles of Fluid Mechanics*, The Ronald Press Co., Capítulo 7, 1960.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 4, 1961.

Quantidade de movimento angular

A relação entre a resultante das forças externas que atuam em um corpo livre e a taxa de variação de quantidade de movimento linear é expressa pela segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = d(m\vec{v})/dt. \tag{27.1}$$

Esta expressão é conveniente no caso de movimento de translação. Quando o escoamento é rotacional, é mais conveniente exprimir a segunda lei de Newton em função de grandezas rotacionais. Em vez de força \vec{F} usamos o torque $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$, produto vetorial da força que atua em um ponto dado pelo vetor posição, \vec{r} , que indica a posição do ponto em relação ao eixo de rotação. Em vez da quantidade de movimento linear $m\vec{v}$, usamos a quantidade de movimento angular $m\vec{r} \times \vec{v}$. Segue-se que no caso de escoamento rotacional a expressão da segunda lei de Newton pode ser posta na seguinte forma:

$$\sum \vec{T} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}), \tag{27.2}$$

i.e., a resultante do torque externo que atua no corpo livre (volume de controle) é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular do corpo em relação ao eixo de rotação. No presente caso, analogamente à eq. (22.19), podemos escrever

$$\int_S \vec{v}(\rho d\vec{S} \cdot \vec{v}) \times \vec{r} = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{g} dV - \int_S P \vec{r} \times d\vec{S} + \sum \vec{r} \times \vec{F}_e. \tag{27.3}$$

O escoamento em rotores de turbomáquinas constitui um importante campo de aplicação da equação de quantidade de movimento angular.

Carga teórica de bomba centrífuga

A Figura 27.1 ilustra o escoamento de um fluido no rotor de uma bomba centrífuga radial. O fluido entra no ponto 1 e é guiado pelas palhetas até o ponto 2 de saída. No percurso de 1 a 2 o fluido sofre a ação da força centrífuga que lhe confere energia.

Neste modelo de escoamento admitimos que o rotor tem um número de palhetas suficientemente grande para que o escoamento de 1 a 2 seja paralelo às palhetas, i.e., o fluido é perfeitamente guiado pelas palhetas. Admitimos também que o escoamento no canal confinado entre duas palhetas é ideal, i.e., não atuam as forças viscosas. Consequentemente é uniforme e tem a velocidade u unidimensional.

A velocidade absoluta do fluido, \vec{u}_a , é a soma vetorial de sua velocidade relativa \vec{u}_R com a velocidade absoluta periférica do rotor $\vec{v}_p = \vec{\omega}r$ ($\vec{\omega}$ é a velocidade angular do rotor e

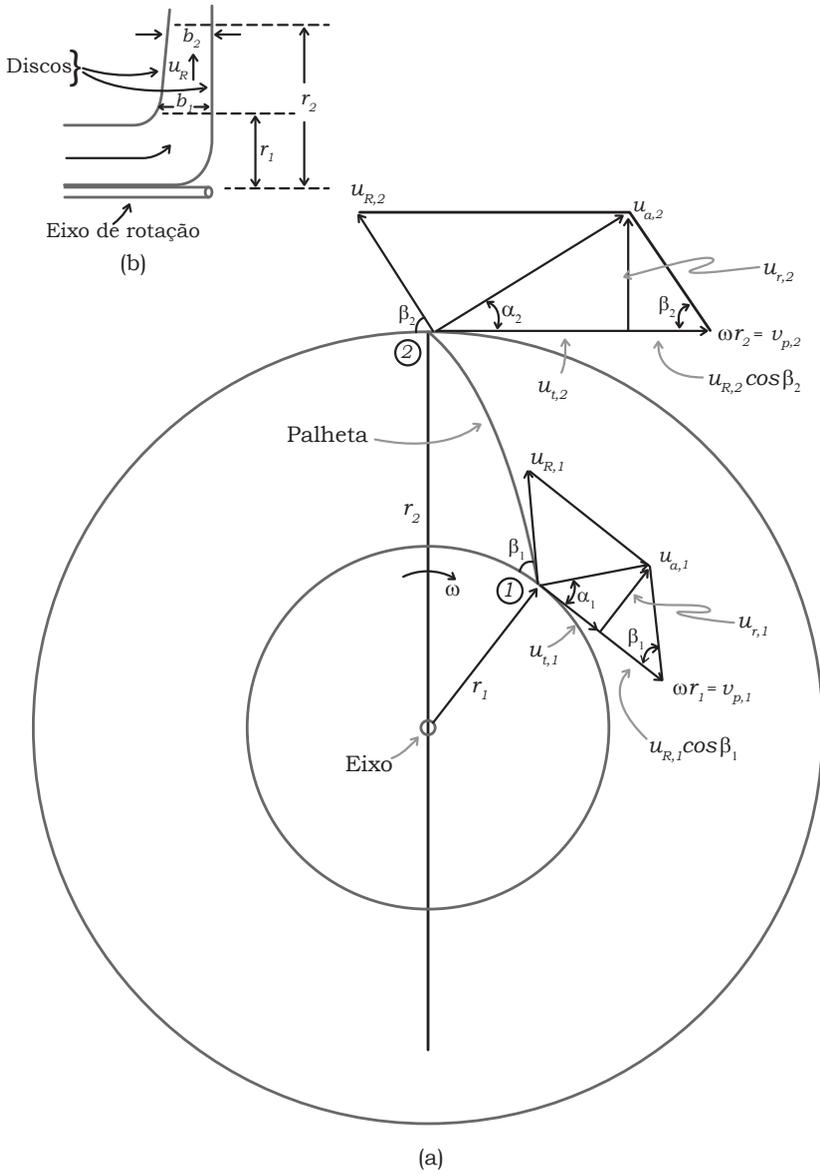


Figura 27.1

r o seu raio contado a partir do eixo de rotação). Podemos estabelecer uma analogia com o esquema da Figura 25.2: o rotor é equivalente à ponte rolante, enquanto o movimento do fluido é equivalente ao da cabine.

O presente modelo físico-matemático inclui também a suposição de que tanto na entrada quanto na saída a velocidade relativa do fluido é paralela às palhetas, i.e., o fluido entra e sai do rotor sem choques.

Na entrada ou na saída do rotor os componentes tangenciais da quantidade de movimento linear por unidade de tempo são dados por $\rho Q u_a \cos \alpha$, onde α é o ângulo que mostra a direção de \vec{u}_a no rotor, ou seja, é o ângulo entre \vec{u}_a e \vec{v}_p .

Considerando um volume de controle que inclua o rotor e aplicando a expressão da quantidade de movimento angular, podemos dizer que o torque externo exercido no fluido é igual ao saldo da taxa de saída de quantidade de movimento através das superfícies 1 e 2 do volume de controle, i.e.,

$$\sum T = \rho Q (r_2 u_{a,2} \cos \alpha_2 - r_1 u_{a,1} \cos \alpha_1). \quad (27.4)$$

As forças externas que compõem $\sum T$ e que atuam no fluido confinado entre as palhetas são: (a) a resultante das forças de pressão das faces de duas palhetas; (b) as forças de pressão que atuam nas superfícies 1 de entrada e 2 de saída do canal. Essas forças são radiais e não produzem torque em relação ao eixo de rotação; (c) as forças de atrito que se opõem ao escoamento relativo e produzem um torque, que se soma ao produzido pelas palhetas. No presente modelo de escoamento ideal essas forças são nulas; e (d) a força gravitacional que evidentemente tem um componente que produz torque, mas que pode ser desprezado em comparação com o torque produzido pelas palhetas. Segue-se que $\sum T$ reduz-se ao torque T correspondente às forças de pressão das faces das palhetas de encontro ao fluido, portanto,

$$T = \rho Q (r_2 u_{a,2} \cos \alpha_2 - r_1 u_{a,1} \cos \alpha_1). \quad (27.5)$$

A energia correspondente a este torque cedida ao fluido por unidade de tempo é a potência teórica, virtual, ou de Euler, P_E , dada por

$$P_E = T \omega = \rho Q [(u_{a,2} \cos \alpha_2)(\omega r_2) - (u_{a,1} \cos \alpha_1)(\omega r_1)]. \quad (27.6)$$

A carga (energia por unidade de peso do fluido) conferida pelo rotor, calculada por este modelo, é a carga virtual ou de Euler W_E , dada por

$$W_E = \frac{T \omega}{\rho Q g} = \frac{1}{g} [(u_{a,2} \cos \alpha_2)(\omega r_2) - (u_{a,1} \cos \alpha_1)(\omega r_1)]. \quad (27.7)$$

Nesta expressão, $u_a \cos \alpha$ é o componente tangencial, u_t , da velocidade absoluta do fluido enquanto ωr é a velocidade periférica v_p do rotor; portanto,

$$W_E = \frac{1}{g} (u_{t,2} v_{p,2} - u_{t,1} v_{p,1}). \quad (27.8)$$

É conveniente exprimir essas equações em função do ângulo β de inclinação das palhetas. O componente radial da velocidade absoluta do fluido no rotor é expresso por

$$u_r = u_a \operatorname{sen} \alpha = u_R \operatorname{sen} \beta. \quad (27.9)$$

Os triângulos das velocidades de entrada e saída mostram que

$$u_t = v_p - u_R \cos \beta, \quad (27.10)$$

ou, eliminando u_R com o auxílio da equação (27.9),

$$u_t = v_p - u_r \cot \beta, \quad (27.11)$$

portanto, a equação (27.8) pode ser expressa por

$$W_E = \frac{1}{g} \left[v_{p,2}(v_{p,2} - u_{r,2} \cot \beta) - v_{p,1}(v_{p,1} - u_{r,1} \cot \beta) \right]. \quad (27.12)$$

Pré-rotação

O escoamento do fluido no interior da bomba obedece ao princípio da menor resistência, i.e., o fluido procura seguir a trajetória que oferece a menor resistência ao escoamento. O princípio da menor resistência é uma forma de expressão do segundo princípio da termodinâmica.

Para entrar no rotor com um mínimo de resistência o fluido adquire uma *pré-rotação*, cuja direção depende do ângulo de entrada das palhetas, β_1 , da vazão que passa pela bomba, Q , e da velocidade periférica do rotor $v_p = \omega r$. Essas grandezas determinam o triângulo das velocidades de entrada e portanto o ângulo da velocidade absoluta de entrada.

Para uma dada velocidade de rotação do rotor e ângulo das palhetas β_1 , existe uma vazão com a qual o fluido aproxima-se radialmente do rotor, i.e., sem pré-rotação (Fig. 27.2a). Para vazões maiores a pré-rotação deve ter sentido contrário, enquanto para vazões menores a pré-rotação deve ser no mesmo sentido que o da rotação do rotor, para que seja obedecido o princípio da menor resistência (Fig. 27.2b e 27.2c).

Quando o fluido que entra na bomba não está sujeito a pré-rotação, i.e., se a velocidade tangencial $u_{t,1} = v_{p,1} - u_{r,1} \cot \beta_1$ é nula e o fluido entra radialmente, a quantidade de movimento angular que entra na unidade de tempo (equivalente ao torque de entrada) é nula e as equações (27.8) e (27.12) reduzem-se a

$$W_E = \frac{1}{g} v_{p,2} u_{t,2} = \frac{1}{g} v_{p,2}(v_{p,2} - u_{r,2} \cot \beta_2). \quad (27.13)$$

A vazão Q é igual ao produto da velocidade radial $u_{r,2}$ pela área da seção de escoamento do canal entre as palhetas dada pelo produto da distância entre os discos b pelo afastamento entre as palhetas (Fig. 27.1b). Portanto, a equação (27.13) permite estabelecer a relação entre a carga teórica de Euler, W_E , e a vazão Q para dada rotação ω e dado ângulo das palhetas β ; a relação é linear.

As mesmas equações e as mesmas considerações são válidas para as bombas centrífugas axiais. Neste caso a velocidade u_r deve representar ainda o componente de \vec{u}_a normal a \vec{v}_p mas, evidentemente, terá uma direção axial e não mais radial.

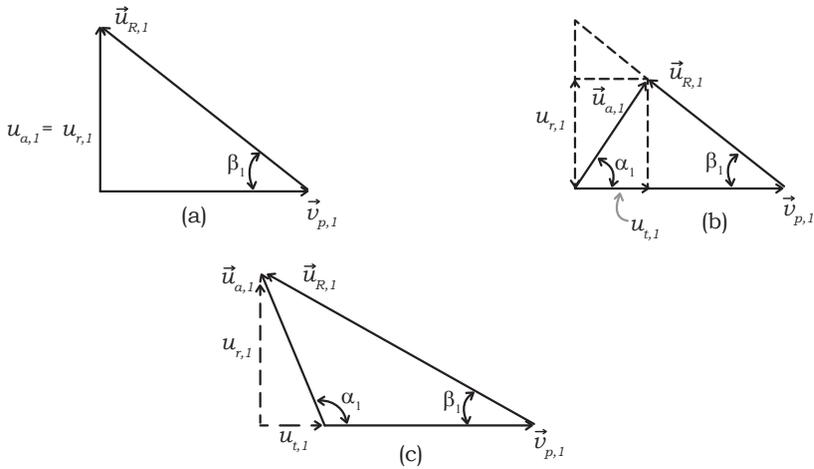


Figura 27.2

Vórtice

Quando a válvula de recalque está fechada a vazão é nula, i.e., $u_R = 0$ e a carga de Euler é dada por

$$W_E = \frac{v_{p,2}^2}{g}. \quad (27.14)$$

Comparando com a equação (17.10) vemos que o escoamento no rotor da bomba quando a vazão é nula é do tipo vórtice forçado, i.e., movimento circular em torno do eixo produzida pela impulsão das palhetas. Portanto, esse modelo de escoamento no rotor da bomba centrífuga é um escoamento ideal rotacional.

Quando a válvula da tubulação de recalque está aberta e a bomba está de fato bombeando o escoamento no rotor, temos a resultante do escoamento circular com o escoamento radial. A esse escoamento superposto dá-se o nome de vórtice em espiral (Fig. 27.3).

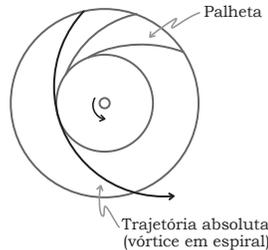


Figura 27.3

Referências

STEPANOFF, A.J. *Turboblowers*, John Wiley & Sons, Capítulo 3, 1955.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 7, 1957.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons, Capítulos 12 e 13, 1960.

Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são baseadas na segunda lei de Newton e descrevem o movimento de um fluido viscoso. A expressão da segunda lei de Newton considerando um volume de controle de massa constante que se move com o fluido é

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_s = D\vec{v}/Dt, \quad (28.1)$$

onde $\sum \vec{F}$ representa a soma das forças externas de campo (gravitacional) e de superfície que atuam na massa contida no volume de controle produzindo a aceleração substantiva $D\vec{v}/Dt$, na direção da força resultante. Nos fluidos em escoamento viscoso a pressão (força de superfície por unidade de área) não é a mesma em todas as direções, i.e., em um volume de controle (no limite ponto) a força externa de superfície pode ser desdobrada em uma componente normal e outra tangencial à superfície.

As equações (3.6) e (3.15) da hidrostática e a equação (11.8) de Euler, que descreve o escoamento ideal, são expressões particulares da equação (28.1) para os casos em que não atuam as forças viscosas, i.e., quando \vec{F}_s representa unicamente as forças de pressão normal por unidade de massa.

Os componentes cartesianos da equação (28.1) são:

$$F_{g,x} + F_{s,x} = Dv_x/Dt, \quad (28.2)$$

$$F_{g,y} + F_{s,y} = Dv_y/Dt, \quad (28.3)$$

$$F_{g,z} + F_{s,z} = Dv_z/Dt. \quad (28.4)$$

Forças de superfície no escoamento viscoso

Na Figura 28.1 mostramos as forças de superfície que atuam em um volume de controle paralelepípedico segundo a direção cartesiana x .

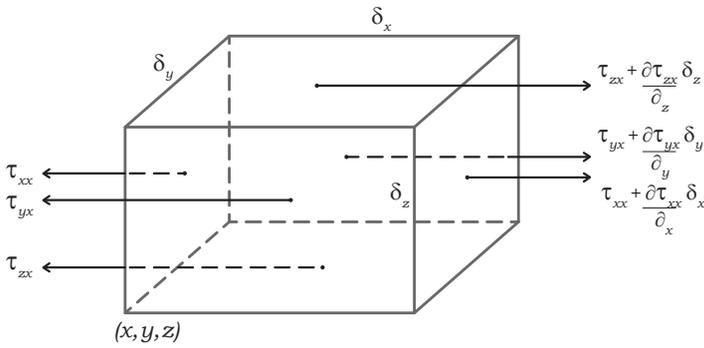


Figura 28.1

Considerando as três direções cartesianas, vemos que as forças de superfície por unidade de área que atuam na direção contrária às forças de pressão, i.e., as tensões, têm nove componentes cartesianos (componentes do tensor) que podem ser convenientemente escritos sob a forma de matriz:

$$M_{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix},$$

onde, por exemplo, τ_{xy} representa o componente da tensão que atua na direção x tangencialmente ao plano normal à direção y . Nas colunas figuram os componentes que atuam em uma direção enquanto nas filas horizontais estão os componentes que atuam tangencial ou normalmente aos planos definidos pelas direções a eles perpendiculares.

Considerando a direção x , vemos pela Figura 28.1 que o saldo das forças de superfície que atuam no volume de controle é dado por

$$\begin{aligned} & (\text{saldo forças superfície})_x \\ &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \delta_x \delta_y \delta_z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta_y \delta_x \delta_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta_z \delta_x \delta_y. \end{aligned} \quad (28.5)$$

Por unidade de massa, esse saldo de forças é expresso por

$$F_{s,x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right). \quad (28.6)$$

Analogamente, considerando as direções y e z , temos,

$$F_{s,y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \quad (28.7)$$

$$F_{s,z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right). \quad (28.8)$$

Expressão da lei de Newton em função das tensões

Substituindo nas equações (28.2) e (28.4) as acelerações por seus valores nas equações (10.11) a (10.13), as forças gravitacionais, de acordo com as equações (3.9) a (3.11), e as forças de superfície, segundo as equações (28.6) a (28.8), resultam

$$\begin{aligned} & -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ & = \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (28.9)$$

$$\begin{aligned} & -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ & = \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (28.10)$$

$$\begin{aligned} & -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \\ & = \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (28.11)$$

Essas equações são gerais no sentido de que podem ser aplicadas tanto ao escoamento newtoniano quanto ao escoamento não newtoniano.

Expressões das tensões

Para que as equações precedentes sejam utilizadas na configuração do escoamento viscoso é necessário exprimir as tensões superficiais em função das taxas de deformação que elas acarretam no volume de controle. É também preciso verificar as relações que existem entre os nove componentes do tensor M_r .

Na teoria da elasticidade de sólidos, as componentes da tensão são relacionadas linearmente com as *deformações* produzidas no corpo livre. No presente caso, as tensões que atuam no volume de controle de um fluido em escoamento serão relacionadas também linearmente com a *taxa de deformação*. Deste modo, introduzimos uma limitação importante, pois esta relação linear é um caso particular para o escoamento newtoniano.

A dedução das fórmulas seguintes pode ser encontrada nas referências 2 e 3.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (28.12)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad (28.13)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad (28.14)$$

$$\tau_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad (28.15)$$

$$\tau_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad (28.16)$$

$$\tau_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (28.17)$$

Já empregamos formas simplificadas dessas equações em algumas oportunidades. Assim, no caso de escoamento unidirecional de fluido newtoniano a equação (28.12) produz a equação (1.6)

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}, \quad (1.6)$$

que é válida para o escoamento na direção x no plano xz . No caso hidrostático ou de escoamento ideal não atuam as forças viscosas e as equações (28.15) a (28.17) mostram

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -P, \quad (28.18)$$

i.e., a pressão em um ponto (representado na Fig. 28.1 por x, y, z) é a mesma em qualquer direção. Tal resultado foi demonstrado pelas equações (4.1) e (4.2). Convém notar que a pressão e a tensão atuam em sentido contrário e que consideramos positiva a compressão.

No caso de escoamento viscoso, a pressão é definida pela relação

$$P = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}), \quad (28.19)$$

i.e., tem o valor numérico da média aritmética das tensões normais. A pressão definida desta maneira é uma invariante do tensor τ (representada pela diagonal da matriz M_τ) e, portanto, não se altera com transformações do sistema coordenado. É normal tomar esta expressão definida matematicamente como igual à pressão termodinâmica.

As equações (28.12) a (28.14) incluem a igualdade entre pares de tensões de cisalhamento cujos índices diferem somente quanto à ordem. Podemos facilmente provar isto considerando os momentos em relação a qualquer eixo e estabelecendo as condições

de equilíbrio do volume de controle. Por exemplo, em relação ao eixo z da Figura 28.1 temos

$$\tau_{xy}\delta_x(\delta_y\delta_z) = \tau_{yx}\delta_y(\delta_x\delta_z), \quad (28.20)$$

portanto, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e, analogamente, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Segue-se que a matriz M_τ contém somente seis componentes diferentes e é simétrica em relação à diagonal principal:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}. \quad (28.21)$$

Expressão da lei de Newton em função das velocidades

Substituindo nas equações (28.9) a (28.11) as tensões por seus valores expressos nas equações (28.12) a (28.17) resultam os componentes cartesianos da segunda lei de Newton em função das velocidades:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -g\rho \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (28.22)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -g\rho \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (28.23)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -g\rho \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (28.24)$$

Nessas equações,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (28.25)$$

As equações (28.22) a (28.24) são chamadas de *equações de Navier-Stokes*; estão expressas em coordenadas cartesianas e em função das velocidades. Essas equações valem no escoamento newtoniano tanto incompressível quanto compressível. No caso de escoamento compressível, as variações de pressão e velocidade, juntamente com atrito, provocam alterações de temperatura que afetam valores de μ e ρ e, portanto, essas propriedades físicas são dependentes das coordenadas x , y e z .

Limitações das equações de Navier-Stokes

- (1) São baseadas na hipótese de Stokes: as tensões que atuam no volume de controle são diretamente proporcionais à taxa de deformação (fluidos newtonianos).
- (2) Não podem ser aplicadas ao escoamento de gases altamente rarefeitos porque supõem fluido contínuo.
- (3) Outras forças de campo além da gravitacional podem ser levadas em conta nas equações de Navier-Stokes.
- (4) Não podem ser usadas quando há transporte de quantidade de movimento no fluido por meio de ondas de choques, que podem ocorrer no escoamento compressível com altas velocidades.

Referências

LONGWELL, P. A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 5, 1958.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 12, 1957.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 3, 1960.

Equações do escoamento viscoso em coordenadas cilíndricas e esféricas

Para certos tipos de problemas é útil exprimir as equações do escoamento viscoso em função das tensões ou em função das velocidades (Navier-Stokes) referidas às coordenadas cilíndricas (Fig. 29.1a) ou esféricas (Fig. 29.1b). Em coordenadas cilíndricas o volume de controle é dado por $r\delta\psi\delta_x\delta_r$ e em coordenadas esféricas por $r^2(\text{sen } \phi)\delta\psi\delta_r$.

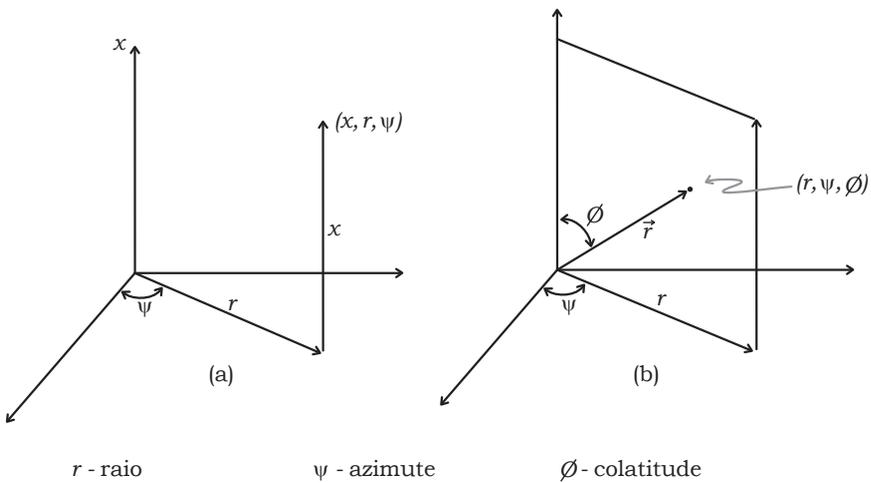


Figura 29.1

Coordenadas cilíndricas em relação às tensões

As equações do movimento em coordenadas cilíndricas e em função das tensões são dadas por

$$\rho \left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\psi^2}{r} \right] = -\rho g \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\psi r}}{\partial \psi} + \frac{\partial(r\tau_{xr})}{\partial x} \right] - \frac{\tau_{\psi\psi}}{r}, \quad (29.1)$$

$$\rho \left[\frac{Dv_\psi}{Dt} + \frac{v_r v_\psi}{r} \right] = -\frac{g\rho}{r} \frac{\partial h}{\partial \psi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\tau_{r\psi})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial(r\tau_{x\psi})}{\partial x} \right] + \frac{\tau_{r\psi}}{r}, \quad (29.2)$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\tau_{rx})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\psi x}}{\partial \psi} + \frac{\partial(r\tau_{xx})}{\partial x} \right]. \quad (29.3)$$

Na equação (29.1) o termo $\rho v_\psi^2 / r$ é a força centrífuga que resulta do movimento do volume de controle na direção ψ e atua a direção r . Nessas expressões as derivadas substantivas são dadas por

$$\frac{Dv_r}{Dt} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial t}, \quad (29.4)$$

$$\frac{Dv_\psi}{Dt} = v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_\psi}{\partial x} + \frac{\partial v_\psi}{\partial t}, \quad (29.5)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad (29.6)$$

e as tensões por

$$\tau_{rr} = -P + \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right], \quad (29.7)$$

$$\tau_{\psi\psi} = -P + \mu \left[\frac{2}{r} \left(\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + v_r \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right], \quad (29.8)$$

$$\tau_{xx} = -P + \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right], \quad (29.9)$$

$$\tau_{r\psi} = \tau_{\psi r} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{v_\psi}{r} \right], \quad (29.10)$$

$$\tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right], \quad (29.11)$$

$$\tau_{\psi x} = \tau_{x\psi} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial x} \right], \quad (29.12)$$

onde

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (29.13)$$

Coordenadas cilíndricas em relação às velocidades

Substituindo as expressões das tensões (29.7) a (29.12) nas equações (29.1) a (29.3) resultam as equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\psi^2}{r} \right] &= -g\rho \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{v_\psi}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] \\ &+ \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} - \frac{v_r}{r} \right), \end{aligned} \quad (29.14)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{Dv_\psi}{Dt} + \frac{v_r v_\psi}{r} \right] &= -\frac{g\rho}{r} \frac{\partial h}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \mu \left[\frac{2}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{2v_r}{r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{v_\psi}{r} \right) \right] \\ &+ \frac{2\mu}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{v_\psi}{r} \right], \end{aligned} \quad (29.15)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -g\rho \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (29.16)$$

Coordenadas esféricas em relação às tensões

Em relação às tensões as equações de movimento são:

$$\rho \left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\phi^2 + v_\psi^2}{r} \right] = -g\rho \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \phi \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \phi \tau_{\phi r})}{\partial \phi} + \frac{\partial(r \tau_{\psi r})}{\partial \psi} \right] - \frac{\tau_{\phi\phi} + \tau_{\psi\psi}}{r}, \quad (29.17)$$

$$\rho \left[\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\psi \cot \phi}{r} \right] = -\frac{g\rho}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \phi \tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \phi \tau_{\phi\phi})}{\partial \phi} + \frac{\partial(r \tau_{\psi\phi})}{\partial \psi} \right] - \frac{\tau_{\psi\psi} \cot \phi}{r} + \frac{\tau_{r\phi}}{r}, \quad (29.18)$$

$$\rho \left[\frac{Dv_\psi}{Dt} + \frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{v_r v_\phi \cot \phi}{r} \right] = -\frac{g\rho}{r \sin \phi} \frac{\partial h}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \phi \tau_{r\psi})}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \phi \tau_{\phi\psi})}{\partial \phi} + \frac{\partial(r \tau_{\psi\psi})}{\partial \psi} \right] + \frac{\tau_{r\psi}}{r} + \frac{\tau_{\phi\psi} \cot \phi}{r}. \quad (29.19)$$

As derivadas substantivas são dadas pelas expressões

$$\frac{Dv_r}{Dt} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\psi}{r \sin \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial v_r}{\partial t}, \quad (29.20)$$

$$\frac{Dv_\phi}{Dt} = v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\psi}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial t}, \quad (29.21)$$

$$\frac{Dv_\psi}{Dt} = v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \phi} + \frac{v_\psi}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial t}, \quad (29.22)$$

e as tensões por

$$\tau_{rr} = -P + \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right], \quad (29.23)$$

$$\tau_{\phi\phi} = -P + \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right], \quad (29.24)$$

$$\tau_{\psi\psi} = -P + \mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_r}{r} \right) + \frac{v_\phi \cot \phi}{r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right], \quad (29.25)$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right], \quad (29.26)$$

$$\tau_{r\psi} = \tau_{\psi r} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\psi}{r} \right) \right], \quad (29.27)$$

$$\tau_{\phi\psi} = \tau_{\psi\phi} = \mu \left[\frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{v_\psi}{\sin \phi} \right) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \psi} \right], \quad (29.28)$$

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial (v_\phi \sin \phi)}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi}. \quad (29.29)$$

Coordenadas esféricas em relação às velocidades

Substituindo as equações (29.23) a (29.28) nas equações (29.17) e (29.19) resultam as equações de Navier-Stokes em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\phi^2 + v_\psi^2}{r} \right] = & -g\rho \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right] \right\} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \mu \left[\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\psi}{r} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{\mu}{r} \left\{ 4 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - 4 \frac{v_r}{r} - \frac{2}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} - \frac{2 v_\phi \cot \phi}{r} \right\} \\ & + \frac{\mu}{r} \left\{ r \cot \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{\cot \phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right\}, \end{aligned} \quad (29.30)$$

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\psi^2 \cot\phi}{r} \right] &= -\frac{g\rho}{r} \frac{\partial h}{\partial\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial\phi} \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left\{ \mu \left[\frac{2}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2v_r}{r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial}{\partial\psi} \left\{ \mu \left[\frac{\operatorname{sen}\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{v_\psi}{\operatorname{sen}\phi} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial\psi} \right] \right\} \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} \right] \right\} + \frac{3\mu}{r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} \right] \\
&+ \frac{2\mu \cot\phi}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} - \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial\psi} - \frac{v_\phi \cot\phi}{r} \right], \tag{29.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{Dv_\psi}{Dt} + \frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{v_\psi v_\phi \cot\phi}{r} \right] &= -\frac{g\rho}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial h}{\partial\psi} - \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial P}{\partial\psi} \\
&+ \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial}{\partial\psi} \left\{ \mu \left[\frac{2}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_\psi}{\partial\psi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{2v_\phi \cot\phi}{r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot v \right] \right\} \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_r}{\partial\psi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\psi}{r} \right) \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left\{ \mu \left[\frac{\operatorname{sen}\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{v_\psi}{\operatorname{sen}\phi} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial\psi} \right] \right\} \\
&+ \frac{\mu}{r} \left\{ 3 \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_r}{\partial\psi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\psi}{r} \right) \right] \right. \\
&\left. + 2 \cot\phi \left[\frac{\operatorname{sen}\phi}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{v_\psi}{\operatorname{sen}\phi} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial\psi} \right] \right\}. \tag{29.32}
\end{aligned}$$

Referências

LONGWELL, P. A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 5, 1958.

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 3, 1960.

Configuração do escoamento viscoso

As equações de Navier-Stokes, (28.22) a (28.24) em coordenadas cartesianas, (29.14) a (29.16) em coordenadas cilíndricas e (29.30) a (29.32) em coordenadas esféricas, podem ser usadas em escoamentos nos quais a viscosidade e a massa específica variam de ponto a ponto e também em escoamentos transientes e não uniformes. É necessário porém, que a relação entre a tensão e a deformação seja linear, i.e., que o fluido seja newtoniano.

Matematicamente, as equações de Navier-Stokes são equações de derivadas parciais, não lineares, de segunda ordem com seis variáveis independentes: pressão P , componentes v_x, v_y, v_z de velocidade \vec{v} , massa específica ρ e viscosidade μ .

Para configurar o escoamento lançamos mão da equação de continuidade (6.10):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (6.10)$$

e das equações que relacionam as propriedades físicas μ e ρ com as condições termodinâmicas de estado: $\mu = f(P, T)$ e $\rho = \psi(P, T)$. Deste modo temos seis equações; mas também introduzimos uma nova variável independente; a temperatura T . A sétima equação necessária para fechar o sistema é a equação da conservação de energia do escoamento compressível, que é baseada no primeiro princípio da termodinâmica. Esta equação será vista mais tarde no estudo do escoamento compressível.

Portanto, para configurar o escoamento viscoso, ficamos com um sistema de sete equações: 3 de Navier-Stokes, 2 de estado, a equação da continuidade e o primeiro princípio da termodinâmica, e 7 variáveis: $P, v_x, v_y, v_z, \mu, \rho$ e T . A solução desse sistema de equações exige o conhecimento de condições limites em número suficiente para permitir a determinação das constantes de integração. No caso do escoamento viscoso não há escorregamento em contornos sólidos, onde as componentes normais e tangenciais da velocidade devem ser nulas.

Até hoje não foi possível configurar o escoamento pela solução desse sistema de sete equações. Entretanto, o sistema pode ser simplificado para a análise de casos particulares de escoamentos newtonianos. Os problemas de escoamento de fluidos devem ser cuidadosamente estudados para verificar se podem ser enquadrados nas equações simplificadas.

Equações de Navier-Stokes simplificadas

Alguns casos particulares importantes são os seguintes:

Viscosidade constante

Desprezando a influência da pressão na viscosidade, o escoamento isotérmico pode ser considerado como de viscosidade constante. Neste caso as equações (28.22) e (28.24) podem ser expressas por:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) \right], \quad (30.1)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\nabla^2 v_y + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{v}) \right], \quad (30.2)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{v}) \right]. \quad (30.3)$$

Os três componentes cartesianos podem ser expressos por uma única equação vetorial, independente de sistemas coordenados

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho \vec{g} - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{v}. \quad (30.4)$$

Nessas equações ∇^2 representa o operador Laplaciano:

$$(\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2).$$

Utilizando o operador $(\vec{v} \cdot \text{grad})$ definido pela equação (6.28), podemos representar a equação (30.4) do seguinte modo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\rho \vec{g} - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{v}. \quad (30.5)$$

Viscosidade e massa específica constantes

É o caso de escoamento incompressível e homogêneo. Se ρ é constante, de acordo com a equação (7.13), $\text{div } \vec{v} = 0$, portanto, a equação (30.4) reduz-se a

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho \vec{g} - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (30.6)$$

Este é um caso prático importante que se aplica à maioria dos escoamentos de líquidos ou escoamentos de gases com velocidades relativamente baixas.

As equações de Navier-Stokes exprimem as condições de equilíbrio dinâmico das forças que atuam no volume de controle:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \rho \vec{g} + \text{grad } P - \mu \nabla^2 \vec{v} = 0, \quad (30.7)$$

onde $\rho D\vec{v}/Dt$ representa as forças de inércia, $\rho \vec{g}$ as de campo e $\text{grad } P$ e $\mu \nabla^2 \vec{v}$ as de superfície, de pressão e viscosa.

No caso de *escoamento permanente*, $\partial \vec{v} / \partial t$ é nulo, portanto, utilizando o operador $(\vec{v} \cdot \text{grad})$, reduzimos a equação (30.6) a

$$\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\rho \vec{g} - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (30.8)$$

Omissão da força de campo

No caso de escoamento confinado, incompressível e homogêneo, podemos omitir a ação da força gravitacional das equações de Navier-Stokes, tal como fizemos na equação de Bernoulli para chegar à equação (12.5). As equações do movimento, tanto de Euler, de Bernoulli ou de Navier-Stokes, representam condições de equilíbrio das forças que atuam em um volume de controle: forças de campo, forças de inércia e forças de superfície (normais nas equações de Euler e Bernoulli, e normais e tangenciais na de Navier-Stokes).

No escoamento confinado com ρ constante, a parte das forças normais de superfície (forças de pressão) que é devida ao peso do volume de controle (ação da gravidade) é equilibrada pelo empuxo hidrostático, portanto, para μ e ρ constantes a equação (30.6) reduz-se a

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (30.9)$$

ou, se o escoamento é permanente,

$$\rho(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (30.10)$$

Nestas expressões, P representa a pressão devida exclusivamente ao movimento obtido, tirando-se da pressão total a pressão correspondente ao peso do fluido.

Essas equações não devem ser usadas no escoamento compressível ou heterogêneo, porque neste caso a variação de massa específica torna atuante a força gravitacional. Também, nas superfícies livres, é a pressão total que é equilibrada pela pressão atmosférica.

Escoamento com baixo número de Reynolds

O número de Reynolds representa a razão entre forças de inércia e forças viscosas, razão esta que foi exemplificada pelas equações (18.1) e (18.2) no caso particular de escoamento permanente dentro de dutos. Quando as forças viscosas predominam sobre as forças de inércia, o valor do número de Reynolds é baixo. Tal ocorre, por exemplo, dentro de dutos; quando a velocidade de escoamento é pequena, o diâmetro é pequeno ou a viscosidade cinemática é alta. Aliás, a equação (18.1)

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho v_x (\partial v_x / \partial x)}{\mu (\partial^2 v_x / \partial y^2)}, \quad (18.1)$$

mostra que as forças de inércia variam com o quadrado da velocidade enquanto as viscosas variam com a primeira potência.

Então, no escoamento muito lento ou no escoamento muito viscoso, nos quais predominam as forças viscosas, a equação (30.6) para μ e ρ constantes reduz-se a

$$-\rho g - \text{grad } P + \mu \nabla^2 \vec{v} = 0, \quad (30.11)$$

ou, se o escoamento é *confinado*,

$$\text{grad } P = \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (30.12)$$

Estas equações representam uma considerável simplificação das equações de derivadas parciais de segunda ordem, pois são agora equações lineares em relação à velocidade.

A teoria hidrodinâmica da lubrificação e a sedimentação de partículas em fluidos são algumas das aplicações dessas equações simplificadas.

Escoamento ideal

No caso do escoamento ideal de um fluido de viscosidade nula, a equação (30.4) reduz-se à equação (11.8) de Euler

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}g - \frac{1}{\rho} \text{grad } P, \quad (11.8)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem. A hidrodinâmica clássica preocupa-se com as soluções dessa equação.

Escoamento com alto número de Reynolds. Quando o valor do número de Reynolds é elevado, as forças de inércia predominam sobre as viscosas. Neste caso, no limite, não podemos tomar $\mu = 0$ nas equações de Navier-Stokes com o intuito de simplificá-las, porque, se o fizermos, estaremos eliminando as derivadas de ordem mais alta e tornando as equações simplificadas resultantes incapazes de satisfazerem simultaneamente as condições de contorno de um escoamento real.

Por exemplo: a equação (11.8) não pode representar uma situação física real porque, se fixarmos como condição de contorno que a velocidade normal a uma superfície sólida seja nula, não poderemos simultaneamente fixar o componente tangencial como nulo. Entretanto, a experiência com fluidos reais prova que a velocidade tangencial deve ser nula.

O que podemos fazer quando $Re \rightarrow \infty$ é omitir das equações de Navier-Stokes certos termos viscosos de menor importância, com o cuidado, entretanto, de não diminuir a ordem das equações para que elas continuem a satisfazer as condições de contorno reais.

Essas simplificações são feitas, por exemplo, na camada-limite que se forma junto a superfícies sólidas (Fig. 18.2) e onde está confinada a atuação das forças viscosas. Fora da camada-limite os termos viscosos das equações de Navier-Stokes são totalmente desprezados e o escoamento é regido pela equação de Euler (11.8).

Referências

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 5, 1958.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 4, 1960.

Equações de Navier-Stokes para μ e ρ constantes

Apresentamos a seguir os componentes da equação vetorial (30.6) em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Essas expressões podem ser simplificadas para resolver diversos problemas práticos.

Coordenadas cartesianas

componente x

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned} \quad (31.1)$$

componente y

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \rho g \frac{\partial h}{\partial y}, \end{aligned} \quad (31.2)$$

componente z

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned} \quad (31.3)$$

Coordenadas cilíndricas

componente r

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_\psi^2}{r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \psi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right] - \rho g \frac{\partial h}{\partial r}, \end{aligned} \quad (31.4)$$

componente ψ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_r v_\psi}{r} + v_x \frac{\partial v_\psi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\psi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \psi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial x^2} \right] - \rho g \frac{\partial h}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (31.5)$$

componente x

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right] - \rho g \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (31.6)$$

Coordenadas esféricas

componente r

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{v_\psi}{r \sin \psi} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\psi^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} - \frac{2}{r^2} v_\psi \cot \psi - \frac{2}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) - \rho g \frac{\partial h}{\partial r}, \end{aligned} \quad (31.7)$$

componente ψ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_\phi}{r \sin \psi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\psi}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \psi}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi} + \mu \left(\nabla^2 v_\psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_\psi}{r^2 \sin \psi} - \frac{2 \cos \psi}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \psi} \right) - \rho g \frac{\partial h}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (31.8)$$

componente ϕ

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \psi} + \frac{v_\phi}{r \sin \psi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\psi v_\phi}{r} \cot \psi \right) \\ &= -\frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \psi} + \frac{2}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \psi}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \phi} \right) - \rho g \frac{\partial h}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (31.9)$$

Condições limites

As condições de contorno comumente usadas para determinar as constantes ou funções de integração das equações do movimento são as seguintes:

1. Nas paredes, a velocidade de escorregamento (velocidade relativa igual à velocidade da parede no mesmo sentido) é nula. Se a parede está em repouso, a velocidade tangencial do fluido deve ser obviamente igual a zero.
2. A componente normal da velocidade do fluido junto à parede deve ter o mesmo valor em módulo e direção da velocidade de translação da parede.
3. Na interface líquido-gás o gradiente de velocidade tangencial pode ser considerado nulo, i.e., o fluxo de quantidade de movimento pode ser considerado nulo na fase líquida.
4. Na interface líquido-líquido há uma continuidade de fluxo de quantidade de movimento e, portanto, também de velocidade. Isto significa que as velocidades e as tensões são iguais em ambos os lados da interface.

Referências

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulos 2 e 3, 1960.

Aplicações das equações de Navier-Stokes

Consideramos a seguir diversas aplicações das equações de Navier-Stokes ao escoamento laminar com viscosidade e massa específica constantes.

Coordenadas cartesianas, escoamento permanente, plano e unidirecional

O escoamento pode ser configurado no plano x, y e a direção preferencial do escoamento segue o eixo x . As componentes v_x e v_y da velocidade são nulas, portanto, de (6.12), $\partial v_x / \partial x$ também é nulo e o escoamento é uniforme na direção x . As equações (31.2) e (31.3) de Navier-Stokes reduzem-se respectivamente a $\partial(P + \rho gh) / \partial y = 0$ e, $\partial(P + \rho gh) / \partial z = 0$, i.e., não há variação de pressão nas direções y e z . Na componente x da equação de Navier-Stokes, equação (31.1), $\partial v_x / \partial t$ é nulo porque o escoamento é permanente, $\partial v_x / \partial x$ e $\partial^2 v_x / \partial x^2$ são nulos porque o escoamento é uniforme. $v_y(\partial v_x / \partial y)$ e $v_z(\partial v_x / \partial z)$ são nulos porque o escoamento é unidirecional e, $\partial^2 v_x / \partial z^2$ é nulo porque o escoamento é bidimensional no plano x, y . Segue-se que

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (32.1)$$

Esta equação pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{d}{dx}(P + \rho gh) = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}, \quad (32.2)$$

onde usamos derivadas totais porque $P + \rho gh$ só varia com x e a velocidade v_x somente com y .

Chegamos portanto a uma equação de derivadas totais, linear em v_x . Levando em conta a relação newtoniana entre a tensão τ_{yx} e o gradiente de velocidade dv_x/dy , equação (2.1), temos

$$\frac{d}{dx}(P + \rho gh) = \frac{d\tau_{yz}}{dy}, \quad (32.3)$$

equação que pode também ser obtida diretamente da lei de Newton em função das tensões, equação (28.9).

Podemos omitir a força de campo gravitacional dessas equações usando a pressão igual à diferença entre a pressão total e a pressão em repouso, tal como fizemos na equação (30.10); neste caso,

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{d\tau_{yx}}{dy}. \quad (32.4)$$

Escoamento entre placas paralelas. Consideremos que as placas da Figura 32.1 são tão extensas na direção de z que o escoamento pode ser considerado plano. A direção dominante do escoamento é a direção x e as forças viscosas estabelecem o gradiente dv_x/dy . O escoamento é considerado uniforme, desprezando-se o efeito das bordas de ataque e fuga das placas. Vale portanto, neste caso, a equação (32.1), onde $d(P + \rho gh)/dx$ é constante. Integrando em relação a x entre os pontos 1 e 2 (Fig. 32.1), resulta

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L}, \quad (32.5)$$

onde $\Delta(P + \rho gh) = (P_2 + \rho gh_2) - (P_1 + \rho gh_1)$.

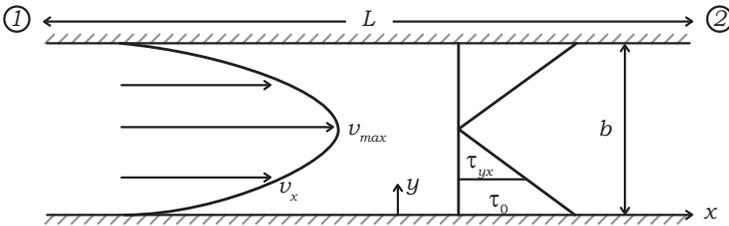


Figura 32.1

Integrando duas vezes em relação a y temos:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (32.6)$$

Dois condições de contorno determinam os valores de C_1 e C_2 (Fig. 32.1)

$$y = 0, \quad v_x = 0, \quad C_2 = 0, \quad (32.7)$$

$$y = b, \quad v_x = 0, \quad C_1 = -\frac{b}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L}, \quad (32.8)$$

portanto, a velocidade local é dada por

$$v_x = \frac{1}{2\mu} (by - y^2) \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right], \quad (32.9)$$

i.e., a distribuição é parabólica. A velocidade máxima deve ocorrer no centro onde $y = b/2$, portanto,

$$v_{\max} = \frac{b^2}{8\mu} \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right]. \quad (32.10)$$

A razão entre a velocidade local e a velocidade máxima é

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = 4 \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (32.11)$$

A vazão volumétrica por unidade de largura da placa, Q_z , é dada por

$$Q_z = \int_0^b v_x dy = \frac{b^3}{12\mu} \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right]. \quad (32.12)$$

A velocidade média u é expressa por

$$u = \frac{Q_z}{b} = \frac{b^2}{12\mu} \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right]. \quad (32.13)$$

Comparando a velocidade média com a velocidade máxima vemos que $u/v_{\max} = 2/3$. A queda da pressão total pode ser calculada por

$$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1) + (12\mu uL/b^2). \quad (32.14)$$

Se as placas são horizontais,

$$P_1 - P_2 = 12\mu uL/b^2, \quad (32.15)$$

entretanto, mesmo para placas inclinadas, $P_1'' - P_2'' = 12\mu uL/b^2$.

Para termos a distribuição da tensão de cisalhamento partimos da equação (32.3), que integrada em relação a y fornece

$$\tau_{yx} = y \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} + C_3. \quad (32.16)$$

Quando $y = b/2$, τ_{yx} é nulo e,

$$C_3 = -\frac{b}{2} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L}, \quad (32.17)$$

portanto, substituindo este valor na equação (32.16) resulta

$$\tau_{yx} = \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \left(\frac{b}{2} - y \right), \quad (32.18)$$

i.e., a pressão varia linearmente de zero no centro até um valor máximo τ_o na parede onde $y = b$.

Escoamento de dois líquidos imiscíveis entre placas paralelas. As vazões dos líquidos são ajustadas de tal modo que a metade da abertura b fica cheia do líquido mais pesado e mais denso enquanto a outra metade fica com o líquido mais leve e menos viscoso.

Neste caso tomamos a origem do eixo y no centro, que coincide com a interface (Fig. 32.2). O escoamento é considerado plano e uniforme entre placas horizontais. Portanto, vale a equação (32.2), que pode ser expressa por

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{P_1 - P_2}{L}. \quad (32.19)$$

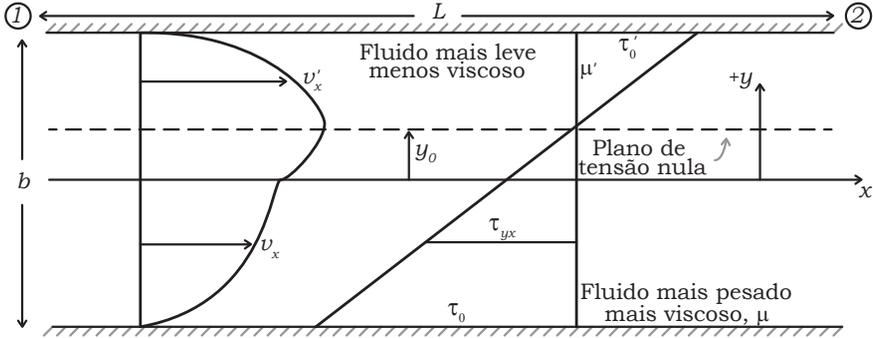


Figura 32.2

Esta equação é válida para as duas fases, portanto, integrando nas duas regiões temos:

$$\tau_{yx} = \frac{P_1 - P_2}{L} y + C_1, \quad (32.20)$$

$$\tau'_{yx} = \frac{P_1 - P_2}{L} y + C'_1, \quad (32.21)$$

onde τ'_{yx} representa a tensão de cisalhamento no fluido mais leve e menos viscoso. Na interface é óbvio que a transferência de quantidade de movimento deve ser contínua, portanto, temos a seguinte condição de contorno:

$$y = 0, \quad \tau_{yx} = \tau'_{yx}, \quad C_1 = C'_1. \quad (32.22)$$

Substituindo nas equações (32.20) e (32.21) a expressão newtoniana da viscosidade, temos

$$-\mu \frac{dv_x}{dy} = \frac{P_1 - P_2}{L} y + C_1, \quad (32.23)$$

$$-\mu' \frac{dv'_x}{dy} = \frac{P_1 - P_2}{L} y + C_1. \quad (32.24)$$

A integração dessas equações fornece

$$v_x = -\frac{(P_1 - P_2)y^2}{2\mu L} - \frac{C_1}{\mu} + C_2, \quad (32.25)$$

$$v'_x = -\frac{(P_1 - P_2)y^2}{2\mu' L} - \frac{C_1}{\mu'} + C_2. \quad (32.26)$$

As três constantes C_1 , C_2 e C'_2 podem ser determinadas pelas seguintes condições de contorno:

$$y = 0, \quad v_x = v'_x, \quad C_2 = C'_2, \quad (32.27)$$

$$y = -b/2, \quad v_x = 0, \quad 0 = -\frac{(P_1 - P_2)b^2}{8\mu L} + \frac{C_1 b}{2\mu} + C_2, \quad (32.28)$$

$$y = b/2, \quad v'_x = 0, \quad 0 = -\frac{(P_1 - P_2)b^2}{8\mu L} - \frac{C_1 b}{2\mu'} + C'_2. \quad (32.29)$$

Essas equações fornecem os seguintes resultados:

$$C_1 = -\frac{(P_1 - P_2)b}{4L} \left(\frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'} \right), \quad (32.30)$$

$$C_2 = -\frac{(P_1 - P_2)b^2}{8\mu L} \left(\frac{2\mu}{\mu + \mu'} \right) = C'_2. \quad (32.31)$$

Com esses valores das constantes de integração podemos chegar às seguintes expressões para a tensão e velocidades:

$$\tau_{yx} = \frac{P_1 - P_2}{2L} b \left[\left(\frac{2y}{b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'} \right) \right], \quad (32.32)$$

$$v_x = \frac{(P_1 - P_2)b^2}{8\mu L} \left[\frac{2\mu}{\mu + \mu'} + \left(\frac{\mu' - \mu}{\mu + \mu'} \right) \left(\frac{2y}{b} \right) - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right], \quad (32.33)$$

$$v'_x = \frac{(P_1 - P_2)b^2}{8\mu' L} \left[\frac{2\mu}{\mu' + \mu} + \left(\frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'} \right) \left(\frac{2y}{b} \right) - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]. \quad (32.34)$$

A Figura 32.2 mostra a distribuição de τ_{yx} , v_x e v'_x de acordo com essas expressões. Quando $\mu = \mu'$, essas equações reduzem-se às equações (32.18) e (32.6), respectivamente.

A velocidade média em cada camada pode ser calculada pelas expressões:

$$u_x = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^0 v_x dy = \frac{(P_1 - P_2)b^2}{48\mu L} \left(\frac{7\mu + \mu'}{\mu + \mu'} \right), \quad (32.35)$$

$$u'_x = \frac{1}{b} \int_0^{b/2} v'_x dy = \frac{(P_1 - P_2)b^2}{48\mu' L} \left(\frac{\mu + 7\mu'}{\mu + \mu'} \right). \quad (32.36)$$

A cota do plano de tensão nula é dada por

$$y_o = \frac{b}{4} \frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'}. \quad (32.37)$$

Nas placas, as tensões máximas são dadas por

$$\tau'_o = \frac{(P_1 - P_2)b}{4L} \frac{\mu + 3\mu'}{\mu + \mu'}, \quad (32.38)$$

$$\tau_o = -\frac{(P_1 - P_2)b}{4L} \frac{3\mu + \mu'}{\mu + \mu'}. \quad (32.39)$$

Se as placas forem inclinadas devemos usar nas equações $(P_1 + \rho g h_1) - (P_2 + \rho g h_2)$ em vez de $P_1 - P_2$.

Película cadente. Consideremos o escoamento de uma película líquida por uma placa inclinada, de tal modo extensa na direção z que v_z e todas as derivadas em relação a z são nulas (Fig. 32.3). Este é mais um exemplo de escoamento permanente, plano e uniforme de fluido homogêneo e incompressível, portanto, das equações (31.1) a (31.3) resulta a equação (32.1)

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0. \quad (32.1)$$

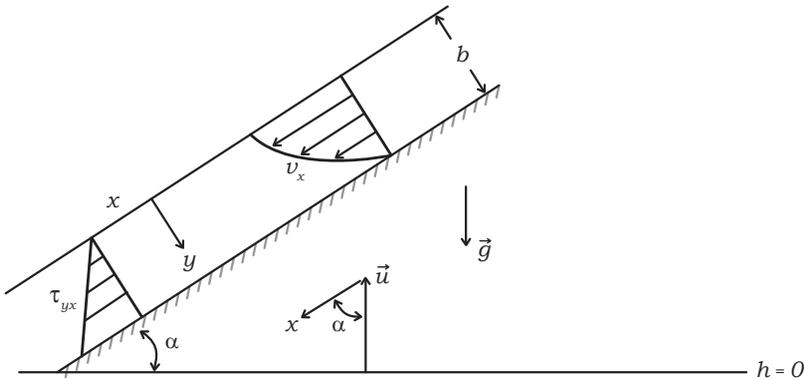


Figura 32.3

No caso presente, $\partial P / \partial x$ é nulo porque a superfície da película é uma superfície livre sujeita a pressão atmosférica constante e $\partial h / \partial x = \text{sen } \alpha$, portanto,

$$-\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \rho g \text{sen } \alpha, \quad (32.40)$$

onde o gradiente de velocidade é negativo por causa da orientação contrária do eixo y em comparação com a da Figura 32.1. Por dupla integração, temos:

$$v_x = -\rho g \frac{\text{sen } \alpha}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (32.41)$$

As condições de contorno para a determinação de C_1 e C_2 são:

$$y = 0, \quad dv_x/dy = 0, \quad C_1 = 0, \quad (32.42)$$

$$y = b, \quad v_x = 0, \quad C_2 = \rho g \operatorname{sen} \alpha b^2 / 2\mu. \quad (32.43)$$

Substituindo esses valores das constantes na equação (32.41) resulta

$$v_x = \frac{\rho g b^2 \operatorname{sen} \alpha}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right], \quad (32.44)$$

expressão que indica relação parabólica entre v_x e y . A velocidade máxima em $y = 0$ é dada por

$$v_{\max} = \frac{\rho g b^2 \operatorname{sen} \alpha}{2\mu}. \quad (32.45)$$

A velocidade média u é obtida do seguinte modo, com o auxílio da equação (32.44):

$$u = \frac{\int_0^b v_x dy}{\int_0^b dy} = \frac{\rho g b^2 \operatorname{sen} \alpha}{3\mu}. \quad (32.46)$$

A vazão volumétrica por unidade de largura Z da placa inclinada é dada por ub , i.e.,

$$Q_z = \frac{\rho g b^3 \operatorname{sen} \alpha}{3\mu}. \quad (32.47)$$

A espessura b da película pode ser calculada pelas seguintes expressões:

$$b = \left(\frac{3\mu u}{\rho g \operatorname{sen} \alpha} \right)^{1/2} = \left(\frac{3\mu Q_z}{\rho g b \operatorname{sen} \alpha} \right)^{1/3} = \left(\frac{3\mu r}{\rho^2 g \operatorname{sen} \alpha} \right)^{1/3}, \quad (32.48)$$

onde $r = \rho Q_z / b = \mu \rho b$ é a vazão mássica por unidade de largura da placa.

A tensão de cisalhamento em função de y pode ser expressa por

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = \rho g \operatorname{sen} \alpha y. \quad (32.49)$$

Na parede, a tensão máxima τ_0 é dada por

$$\tau_0 = \rho g \operatorname{sen} \alpha b. \quad (32.50)$$

Portanto, a distribuição linear da tensão (fluxo de quantidade de movimento molecular) é

$$\tau_{yx} = \tau_0 (y/b). \quad (32.51)$$

Essas equações são válidas somente para o escoamento laminar com linhas de corrente retas e paralelas à placa. O aumento de v_x e b e a diminuição de μ/ρ provoca variações no regime de escoamento:

- Escoamento laminar uniforme, $Re < 4$ a 25
- Escoamento laminar ondulado, 4 a $25 < Re < 1.000$ a 2.000
- Escoamento turbulento, $Re > 1.000$ a 2.000
- No caso, $Re = 4b\mu\rho/\mu = 4r/\mu$

Escoamento de Couette

O escoamento que ocorre entre duas placas planas paralelas quando uma das quais se move com velocidade uniforme u_p (Fig. 32.4), é chamado escoamento Couette. No caso geral este escoamento resulta da superposição do escoamento laminar entre placas paralelas imóveis com o escoamento provocado pelo movimento de uma das placas. Aplica-se a este caso a equação (32.2) que, por dupla integração, fornece

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} y^2 + C_4 y + C_5. \tag{32.52}$$

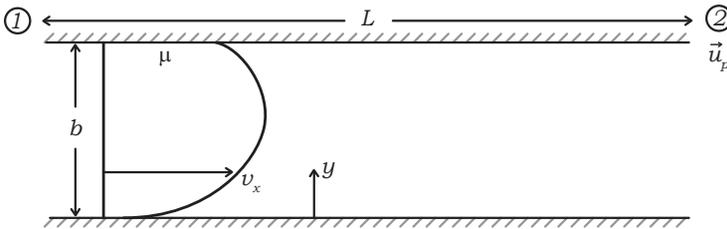


Figura 32.4

Esta expressão é análoga à equação (32.6), porém está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$y = 0, \quad v_x = 0, \quad C_4 = 0, \tag{32.53}$$

$$y = b, \quad v_x = u_p, \quad C_3 = -\frac{u_p}{b} - \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} b, \tag{32.54}$$

portanto, substituindo esses valores de C_4 e C_5 na equação (32.52), temos,

$$v_x = \frac{u_p}{b} y - \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} (by - y^2). \tag{32.55}$$

Neste caso, a distribuição v_x da velocidade depende tanto de u_p como de $\Delta(P + \rho gh)/L$; este último parâmetro pode ser positivo, nulo ou negativo. Quando $\Delta(P + \rho gh)/L$ é nulo, i.e., quando não há gradiente de pressão na direção do escoamento:

$$v_x = (u_p/b)y, \quad (32.56)$$

e a distribuição de velocidade é linear, tal como na Figura 32.1. Este tipo particular de escoamento de Couette tem o nome de *escoamento cisalhante simples* ou *escoamento Couette simples*.

Se u_p é nulo a equação (32.55) transforma-se na equação (32.9), mostrando que o escoamento de Couette geral é a resultante de dois escoamentos. A configuração geral da velocidade no escoamento de Couette pode ser estudada com o auxílio da equação (32.55) posta sob uma forma adimensional:

$$\frac{v_x}{u_p} = \frac{y}{b} - \left[\frac{b^2}{2\mu u_p} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{y}{b}\right). \quad (32.57)$$

A Figura 32.5 dá a distribuição (v_x/u_p) , (y/b) em função do parâmetro $p = b^2\Delta(P + \rho gh)/2\mu u_p L$ que representa adimensionalmente o gradiente de pressão.

Para $p > 0$, i.e., quando a pressão cai na direção do escoamento, a velocidade é positiva ao longo de toda largura b do canal. Para valores negativos de p a velocidade em uma parte da largura pode ser negativa, i.e., pode ocorrer uma contracorrente nas proximidades da placa em repouso; isto ocorre quando $p < -1$. A contracorrente é devida ao atrito das camadas mais rápidas, com as camadas mais lentas nas cercanias da placa imóvel, ser insuficiente para vencer o gradiente adverso de pressão.

Os escoamentos de Couette têm importância prática na interpretação da lubrificação hidrodinâmica de mancais, entretanto, nessa aplicação as placas não podem ser paralelas e o escoamento não é uniforme.

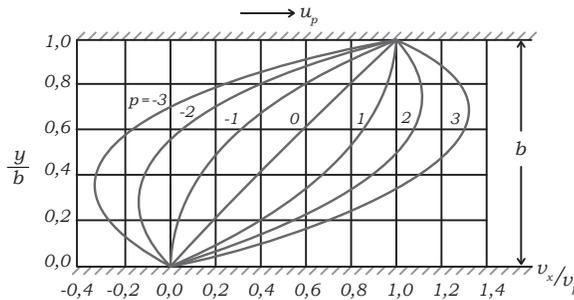


Figura 32.5

Referências

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 2, 1960.

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 3, 1958.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 5, 1960.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1961.

Coordenadas cilíndricas, escoamento permanente, plano e unidirecional

No escoamento confinado ou forçado em condutos cilíndricos, por exemplo, é conveniente o emprego das equações de Navier-Stokes expressas em coordenadas cilíndricas. O escoamento é considerado assimétrico e pode ser configurado no plano x, r , sendo x a direção do escoamento. As equações (31.4) e (31.5) reduzem-se, respectivamente, a $\partial(P + \rho gh)/\partial r = 0$ e $\partial(P + \rho gh)/\partial \psi = 0$, i.e., não há variação de pressão nas direções radial e angular. A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas, (7.7), neste caso de escoamento permanente, incompressível e homogêneo, reduz-se simplesmente a $\partial v_x/\partial x = 0$, i.e., a velocidade não varia na direção do escoamento, que é dito uniforme.

No presente problema a componente x da equação de Navier-Stokes, equação (31.6), reduz-se a

$$\frac{d(P + \rho gh)}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right). \tag{33.1}$$

Para fluidos newtonianos esta equação pode ser colocada sob a forma

$$\frac{d(P + \rho gh)}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}). \tag{33.2}$$

Usamos derivadas totais porque $P + \rho gh$ só depende de x enquanto v_x ou τ_{rx} só variam com r .

Duto reto. O escoamento em condutos forçados de seção circular pode ser estudado com o auxílio das equações simplificadas (33.1) ou (33.2). Consideramos um trecho reto de tubo suficientemente longe das pontas para que o escoamento possa ser considerado unidirecional e uniforme (Fig. 33.1).

Considerando a equação (33.2) entre os pontos 1 e 2 temos:

$$\frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) = \left[\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] r. \tag{33.3}$$

Integrando esta equação em relação a r , temos:

$$\tau_{rx} = \frac{\Delta(P + \rho gh)}{2L} r + \frac{C_1}{r}, \tag{33.4}$$

onde a constante C_1 deve ser nula porque τ_{rx} não pode ser infinito quando $r = 0$. Portanto, a distribuição do fluxo de quantidade de movimento é dada por

$$\tau_{rx} = \Delta(P + \rho gh)r/2L. \tag{33.5}$$

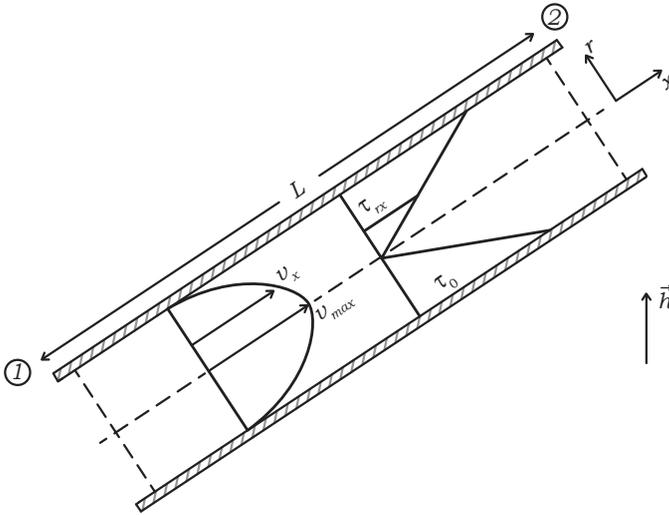


Figura 33.1

Na parede a tensão máxima é

$$\tau_0 = \Delta(P + \rho gh)R/2L. \quad (33.6)$$

Portanto, a distribuição linear da tensão é

$$\tau_{rx} = \tau_0(r/R) = \tau_0[1(y/R)], \quad (33.7)$$

onde y é a distância a partir da parede.

No presente caso a tensão τ_{rx} é dada por $-\mu dv_x/dr$, portanto

$$dv_x/dr = -\Delta(P + \rho gh)r/2\mu L. \quad (33.8)$$

Por integração, temos:

$$v_x = -[\Delta(P + \rho gh)/4\mu L]r^2 + C_2, \quad (33.9)$$

onde C_2 é obtido pela condição de contorno

$$r = R, \quad v_x = 0, \quad C_2 = \Delta(P + \rho gh)R^2/4\mu L. \quad (33.10)$$

Segue-se que a distribuição de v_x é a parábola

$$v_x = [\Delta(P + \rho gh)R^2/4\mu L][1 - (r/R)^2]. \quad (33.11)$$

A velocidade máxima ocorre em $r = 0$, portanto

$$v_{\max} = \Delta(P + \rho gh)R^2/4\mu L. \quad (33.12)$$

A velocidade média pode ser calculada pela expressão

$$u = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_x r dr d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\psi} = \frac{\Delta(P + \rho gh)R^2}{8\mu L}. \quad (33.13)$$

Podemos então estabelecer as seguintes relações entre v_{\max} e v_x e a velocidade média:

$$v_{\max} = 2u, \quad (33.14)$$

$$v_x = 2u \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (33.15)$$

A vazão volumétrica $Q = uS$ pode ser calculada por

$$Q = \frac{\Delta(P + \rho gh)\pi R^4}{8\mu L} = \frac{\Delta(P + \rho gh)\pi D^4}{128\mu L}, \quad (33.16)$$

ou, usando a diferença entre a pressão total e a pressão de repouso

$$Q = \frac{(\Delta P^n)\pi D^9}{128\mu L}. \quad (33.17)$$

Essas equações exprimem a lei de Poiseuille, que está sujeita às seguintes restrições:

- (1) Escoamento laminar, i.e., $Re = Du\rho/\mu$ menor do que aproximadamente 2.000.
- (2) Escoamento incompressível e homogêneo de fluido newtoniano.
- (3) Escoamento uniforme unidirecional, i.e., longe das pontas do duto. Determinou-se empiricamente que é necessário um comprimento de entrada

$$L_e = 0,05D Re, \quad (33.18)$$

para que se estabeleça o perfil parabólico da velocidade, i.e., para que o escoamento seja *plano*.

Equilíbrio de forças

Este caso simples de escoamento em tubo reto pode ser analisado diretamente por um equilíbrio de forças, sem a necessidade de se passar pelas equações de Navier-Stokes. A Figura 33.2 representa um corpo livre cilíndrico limitado por seções transversais de mesmo diâmetro e pela parede da tubulação, i.e., representa um volume de controle do fluido em escoamento em um duto reto.

Como o cilindro está animado de um movimento uniforme e permanente, as forças de inércia são nulas e o equilíbrio das outras forças de pressão normal e tensão de cisalhamento que atuam na sua superfície é dado por:

$$(\Delta P)\pi R^2 = \tau_0 2\pi RL. \quad (33.19)$$

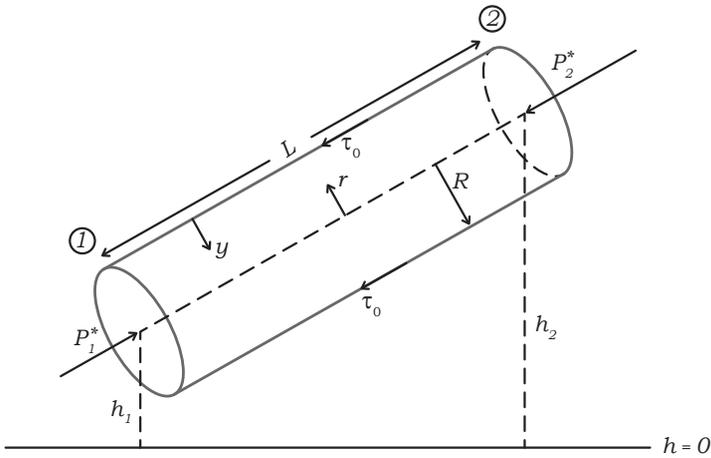


Figura 33.2

Tirando o valor da tensão na parede temos,

$$\tau_0 = \frac{\Delta P}{2L} R. \quad (33.20)$$

Considerando a pressão total, que inclui a ação das forças de campo, o equilíbrio fornece diretamente a equação (33.6):

$$\tau_0 = \frac{\Delta(P + \rho g h)}{2L} R. \quad (33.6)$$

É importante notar que essas últimas equações podem ser aplicadas tanto ao escoamento laminar quanto ao escoamento turbulento, pois representam simplesmente um balanço global de forças externas que atuam no volume de controle.

Fator de atrito

No escoamento laminar ou turbulento é usual exprimir adimensionalmente a tensão na parede τ_0 dividindo-se pela chamada pressão dinâmica $\rho u^2/2$; essa razão tem o nome de fator de atrito. No escoamento em tubulações o grupo adimensional fator de atrito f é convenientemente expresso por

$$f = 4 \left(\frac{\tau_0}{\rho u^2/2} \right). \quad (33.21)$$

Eliminando τ_0 com o auxílio da equação (33.6) temos, tanto para o escoamento laminar como para o turbulento,

$$\Delta(P + \rho g h) = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2} \rho. \quad (33.22)$$

De acordo com o balanço de carga, equação (20.6), $\Delta(P + \rho gh) = \rho gh_a$ pois, no caso, $u_1 = u_2$. Portanto,

$$h_a = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2} \rho. \quad (33.23)$$

A relação entre a *perda* de carga e a tensão na parede é dada por

$$h_a = 4\tau_0 L / \rho D g. \quad (33.24)$$

Para o escoamento laminar, combinado às equações (33.13) a (33.22) para eliminar $\Delta(P + \rho gh)$, resulta a seguinte expressão do fator de atrito:

$$f = 64\mu / Dup = 64 / \text{Re}. \quad (33.25)$$

Eliminando f desta expressão com o auxílio da equação (33.21)

$$\tau_0 = 8\mu u / D. \quad (33.26)$$

Coefficiente de correção da energia cinética

O coeficiente α definido pela equação (19.13) corrige a energia cinética calculada com a velocidade média u levando em conta a distribuição radial da velocidade. No caso de escoamento laminar a relação v_r e u é expressa pela equação (33.15); portanto,

$$\alpha = \frac{1}{u^3 S} \int_S v_x^2 dS = \frac{1}{\pi R^2 u^3} \int_0^R \left\{ 2u \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\}^2 2\pi r dr = 2,$$

tal como tínhamos indicado anteriormente para o escoamento laminar em condutos cilíndricos.

Coefficiente de correção de quantidade de movimento

No escoamento laminar, o valor do coeficiente ψ definido pela equação (22.10) é dado por

$$\psi = \frac{1}{u^2 S} \int_S v_x^2 dS = \frac{1}{\pi R^2 u^2} \int_0^R \left\{ 2u \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right) \right] \right\}^2 2\pi r dr = \frac{4}{3}.$$

Seção anular. Consideremos o escoamento na seção anular entre os tubos concêntricos esquematizados na Figura 33.3. Introduzimos as mesmas simplificações nas equações de Navier-Stokes que conduzem à equação (33.3).

Integrando esta equação (33.3) entre os limites r_i e r (aberto entre r_i e r_o) temos:

$$\int_{(r\tau_{rx})_i}^{r\tau_{rx}} d(r\tau_{rx}) = \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \int_{r_i}^r r dr. \quad (33.27)$$

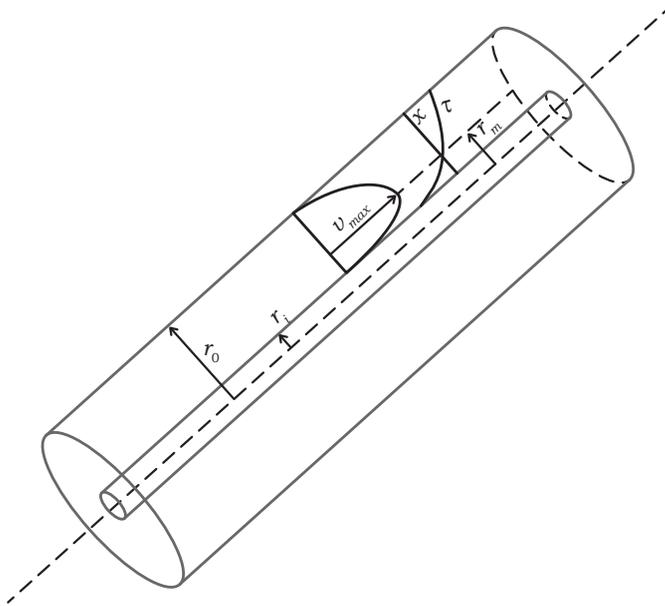


Figura 33.3

Tirando o valor de τ_{rx} chegamos a

$$\tau_{rx} = \frac{r_i(\tau_{rx})_i}{r} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \left(r - \frac{r_i^2}{r} \right). \quad (33.28)$$

Portanto, no espaço anular, a tensão de cisalhamento não varia linearmente com o raio a não ser quando $r_i = 0$. Vemos que para os valores de r mais próximos de r_i a tensão τ_{rr} é negativa passando depois por um valor nulo onde $v = v_{\max}$, para daí em diante tornar-se positivo até $r = r_0$. A tensão mede o fluxo de quantidade de movimento molecular que transfere-se na direção da velocidade decrescente, i.e., contra o aumento de r , de r_i até r_m e, no mesmo sentido, de r_m a r_0 .

Substituindo-se na equação (33.28) a expressão newtoniana de τ_{rx} em função do gradiente de velocidade, resulta

$$dv_x = \left[\frac{r_i(\tau_{rx})_i}{\mu} - \frac{r_i^2}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \frac{dr}{r} + \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} r dr. \quad (33.29)$$

Integrando desde $r = r_i$ quando $v_x = 0$ até um raio r qualquer, temos:

$$v_x = \left[\frac{r_i(\tau_{rx})_i}{\mu} - \frac{r_i^2}{\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \ell n \frac{r}{r_i} + \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} (r^2 - r_i^2). \quad (33.30)$$

Pondo $r = r_0$ quando $v_x = 0$, temos:

$$\frac{r_i(\tau_{rx})_i}{\mu} - \frac{r_i^2}{2\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} = \frac{r_0^2 - r_i^2}{4\mu \ell n \frac{r_0}{r_i}} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L}, \quad (33.31)$$

portanto, comparando essas duas últimas expressões vemos que a distribuição da velocidade pode ser expressa por

$$v_x = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \left[r^2 - r_i^2 \frac{r_o^2 - r_i^2}{\ell n \frac{r_o}{r_i}} \ell n \frac{r}{r_i} \right]. \quad (33.32)$$

Vemos que a distribuição não é parabólica. A velocidade média é obtida por

$$u = \frac{\int_{r_i}^{r_o} v_x r dr}{\int_{r_i}^{r_o} r dr} = \frac{1}{4\mu} \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \left(\frac{r_o^2 + r_i^2}{2} - \frac{r_o^2 - r_i^2}{\ell n \frac{r_o}{r_i}} \right). \quad (33.33)$$

O raio r_m correspondente à velocidade máxima pode ser obtido igualando a zero o segundo membro da equação (33.28), ou derivando v_x em relação a r e igualando o resultado a zero. O resultado obtido tirando-se o valor de r é:

$$r_m = \left[\frac{r_o^2 - r_i^2}{\ell n \frac{r_o}{r_i}} \right]^{1/2}, \quad (33.34)$$

i.e., r_m^2 é a média logarítmica entre r_o^2 e r_i^2 .

As expressões da tensão, velocidade local e velocidade média podem ser simplificadas com o auxílio da equação (33.34):

$$\tau_{rx} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right), \quad (33.35)$$

$$v_x = \frac{1}{4\mu} \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \left(r_i^2 + r_m^2 \ell n \frac{r}{r_i} - r^2 \right), \quad (33.36)$$

$$u = \frac{1}{8\mu} \left[-\frac{\Delta(P + \rho gh)}{L} \right] \left(r_o^2 + r_i^2 - 2r_m^2 \right). \quad (33.37)$$

Referências

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 2, 1960.

LONGWELL, P. A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 3, 1958.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1961.

Coordenadas cartesianas, escoamento transiente, plano e unidirecional

Placa plana subitamente acelerada. Consideremos uma placa imóvel em um fluido em repouso. A placa é plana e suficientemente extensa para que o efeito das bordas possa ser desprezado quando ela for subitamente posta em movimento com velocidade constante u_p . A placa situa-se no plano x, z conforme mostra a Figura 34.1a. Em um dado instante ($t = 0$) a placa começa a se movimentar na direção x (Fig. 34.1b). O perfil da velocidade leva um certo tempo para se estabelecer e durante este tempo o escoamento é transiente (Fig. 34.1c); este problema já foi ilustrado na Figura 1.3.

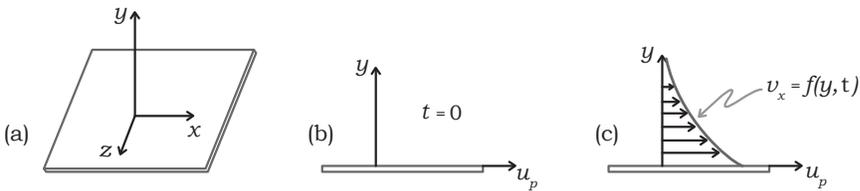


Figura 34.1

Os componentes v_y e v_z são nulos, portanto, a equação da continuidade diz que $\partial v_x / \partial x$ é nulo e o escoamento é uniforme. Como o escoamento é também unidirecional, as equações de Navier-Stokes, (31.1) a (31.3), reduzem-se a

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial(P + \rho gh)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (34.1)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y}(P + \rho gh), \quad (34.2)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho gh). \quad (34.3)$$

No presente caso, $\partial(P + \rho gh) / \partial x$ é também nulo, pois o fluido é considerado semi-infinito (confinado) e não há gradiente de pressão P^* devido ao movimento na direção x . Segue-se que a equação diferencial que rege este escoamento é

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (34.4)$$

onde $v_x = f(y, t)$. As condições de contorno são:

$$y > 0, \quad t \leq 0, \quad v_x = 0, \quad (34.5)$$

$$y = 0, \quad t > 0, \quad v_x = u_p, \quad (34.6)$$

$$y = \infty, \quad t \geq 0, \quad v_x = 0. \quad (34.7)$$

A solução da equação (34.4) é

$$v_x = u_p \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\gamma t}} \right) \right], \quad (34.8)$$

onde erf representa a função erro. A função erro de uma variável λ tem a seguinte expressão:

$$\operatorname{erf} \lambda = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda. \quad (34.9)$$

Valores de erf λ são encontrados em tabelas e variam de 0 a 0,99 conforme λ varia de 0 a aproximadamente 2,0. Portanto, quando $y = 4\sqrt{\gamma t}$, $v_x = 0,01u_p$. Este valor de y representa uma espessura de camada-limite indicativa da “extensão da penetração” da quantidade de movimento molecular na direção y provocada pelo movimento da placa na direção x . Vemos que quanto mais viscoso o fluido e maior o tempo, maior a “penetração”, i.e., maior a espessura da camada-limite que recebe a ação das forças viscosas.

Coordenadas cartesianas, escoamento permanente, plano, não uniforme

Nos exemplos precedentes, as equações de Navier-Stokes puderam ser simplificadas por omissão de termos nulos e por isso forneceram soluções exatas. Existem outros casos de escoamento cuja configuração pode ser feita de maneira aproximada, desprezando-se nas equações do movimento viscoso os termos cuja ordem de grandeza é pequena em comparação com a de outros. Consideramos a seguir uma aplicação deste tipo: o escoamento provocado pelo movimento da sapata na cunha de lubrificação. Mais adiante encontramos o estudo da camada-limite, que também pode ser efetuado por simplificações das equações de Navier-Stokes por omissão de termos de menor atuação na configuração do escoamento.

Cunha de lubrificação

A Figura 34.2 mostra a sapata deslizante e o bloco fixo (guia) que compõem a cunha de lubrificação. Admitimos que a sapata é suficientemente extensa na direção z para que possamos desprezar o efeito das bordas e tornar plano o escoamento.

Admitimos que o óleo é incompressível e homogêneo e tem viscosidade constante, i.e., desprezamos o aquecimento provocado pelo atrito. Esse aquecimento só é importante em mancais de alta rotação. A cunha trabalha com baixas velocidades.

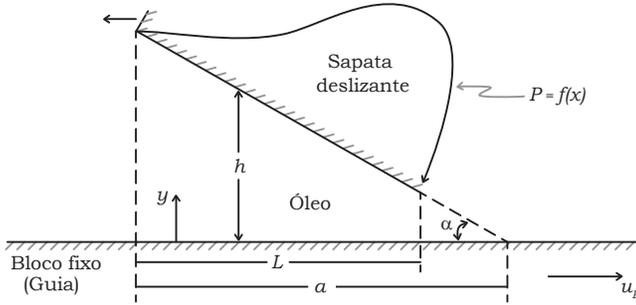


Figura 34.2

A sapata está inclinada segundo um pequeno ângulo α , e a folga é muito menor que o comprimento L . Para simplificar a análise do problema, aplicamos ao conjunto sapata-guia o princípio do movimento relativo, de tal sorte que tornamos imóvel a sapata, admitindo que o bloco fixo move-se com a velocidade u_B igual e oposta à velocidade que anima a sapata. Desta maneira o escoamento pode ser considerado permanente, se bem que não uniforme no plano x, y .

Este é um exemplo de escoamento confinado e homogêneo, de modo que podemos omitir sem erro a ação da gravidade. Entretanto, vamos considerar a pressão total P em vez da pressão devida ao movimento P^* , desprezando-se nela a variação da pressão de repouso com a variação de cota h , que de fato é muito pequena.

Não atua nenhuma força na direção z , de modo que as equações de Navier-Stokes reduzem-se a

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (34.10)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \quad (34.11)$$

O ângulo α é muito pequeno, portanto, a folga h é muito menor do que o comprimento L da sapata, então podemos desprezar o escoamento na direção y em comparação com o escoamento na direção x e, deste modo, configurar aproximadamente o movimento pela equação

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right). \quad (34.12)$$

Nesta expressão, o primeiro membro representa a força de inércia, enquanto o segundo e terceiro termos do segundo membro representam as forças viscosas. Vejamos a importância relativa dessas forças: a razão entre as duas forças viscosas pode ser expressa por

$$\frac{\mu(\partial^2 v_x / \partial y^2)}{\mu(\partial^2 v_x / \partial x^2)} \propto \frac{\mu_B / h^2}{\mu_B / L^2} \propto \left(\frac{L}{h} \right)^2, \quad (34.13)$$

i.e., $\partial^2 v_x / \partial x^2$ pode ser desprezado em comparação com $\partial^2 v_x / \partial y^2$; a razão entre a força de inércia e a força viscosa mais atuante pode ser estimada:

$$\frac{\rho v_x (\partial v_x / \partial x)}{\mu (\partial^2 v_x / \partial y^2)} \propto \frac{\rho u_B^2 / L}{\mu u_B / h^2} \propto \left(\frac{Lu_B \rho}{\mu} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2, \quad (34.14)$$

i.e., a força viscosa predomina mesmo quando o número de Reynolds $Lu_B \rho / \mu$ é relativamente alto. Feitas essas simplificações a equação (34.12) reduz-se a

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (34.15)$$

Esta equação é da mesma forma que a equação (32.2) do escoamento unidirecional e uniforme, que foi usada para expressar o escoamento Couette. Entretanto, neste caso, o escoamento não é realmente uniforme e dP/dx não é na realidade constante, embora as simplificações introduzidas tenham incluído a condição $\partial P / \partial y = 0$. Segue-se que é necessário mais uma equação para, em um conjunto com a equação (34.15), configurar este escoamento não uniforme. Esta equação é a da continuidade, $(\partial v_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) = 0$, onde não podemos desprezar qualquer dos dois termos. Neste problema é mais conveniente usar a forma integral da equação da continuidade dada pela equação (7.5)

$$\int_S v \cos \alpha dS = 0, \quad (7.5)$$

onde $v \cos \alpha = v_x$ e $dS = (\Delta z) dy$. Aplicando esta equação para calcular a vazão por unidade de largura z que passa em cada seção da folga, temos:

$$Q_z = \int_0^h v_x dy = \text{constante}. \quad (34.16)$$

Integrando a equação (34.15) em relação a y , temos:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (34.17)$$

Esta expressão está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$y = 0, \quad v_x = u_B, \quad C_2 = 0, \quad (34.18)$$

$$y = h, \quad v_x = 0, \quad C_1 = -\frac{u_B}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} h. \quad (34.19)$$

Substituindo esses valores de C_1 e C_2 na equação (34.17) resulta:

$$v_x = u_B \left(1 - \frac{y}{h} \right) - \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (hy - y^2), \quad (34.20)$$

expressão que dá o valor da velocidade em função de y . Esta equação é semelhante à equação (32.55) do escoamento de Couette, entretanto, no presente caso, tanto h quanto dP/dx variam na equação da continuidade, (34.16), que integrando, temos:

$$Q_z = \frac{u_B h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dP}{dx}. \quad (34.21)$$

Tirando o valor de dP/dx :

$$\frac{dP}{dx} = 12\mu \left(\frac{u_B}{2h^2} - \frac{Q_z}{h^3} \right). \quad (34.22)$$

Fora da cunha prevalece a pressão ambiente constante P_0 , portanto, integrando-se $x = 0, P = P_0$ até um limite aberto x, P dentro da folga da cunha, temos:

$$P - P_0 = 6\mu u_B \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q_z \int_0^x \frac{dx}{h^3}, \quad (34.23)$$

levando em conta que para $x = L, P = P_0$ e tirando o valor de Q_z

$$Q_z = \frac{u_B \int_0^L (dx/h^2)}{2 \int_0^L (dx/h^3)}, \quad (34.24)$$

$$h = \alpha(a - x), \quad (34.25)$$

onde α é dado em radianos. Substituindo esta relação na equação (34.24) e integrando resulta:

$$Q_z = u_B \alpha a \frac{a - L}{2a - L}. \quad (34.26)$$

A substituição dessas duas últimas expressões na equação (34.23) produz:

$$P = P_0 + \frac{6\mu u_B}{h^2} \left[\frac{x(L - x)}{2a - L} \right] = P_0 + \frac{6\mu u_B}{\alpha^2 (2a - L)} \left[\frac{x(L - x)}{(a - x)^2} \right]. \quad (34.27)$$

Essa expressão permite calcular a distribuição da pressão ao longo de x . A pressão varia de P_0 em $x = 0$ passando por um máximo e decrescendo outra vez para P_0 em $x = L$. A posição da pressão máxima é determinada substituindo-se Q_z dado pela equação (34.26) na equação (34.22) e igualando a zero este valor de dP/dx , i.e.,

$$h_{\max} = \frac{2\alpha a(a - L)}{2a - L}. \quad (34.28)$$

Com o auxílio da equação (34.25) calculamos:

$$x_{\max} = \frac{aL}{2a - L}. \quad (34.29)$$

Substituindo esses dois valores na equação (34.27) resulta:

$$P_{\max} = P_0 + \frac{3\mu u_B L^2}{2\alpha^2 a(a - L)(2a - L)}. \quad (34.30)$$

A pressão média na cunha é dada por:

$$\bar{P} = \frac{1}{L} \int_0^L P d\alpha = P_0 + 6 \frac{\mu u_B}{L\alpha^2} \left[\ln \left(\frac{a}{a-L} \right) - \frac{2L}{2a-L} \right]. \quad (34.31)$$

Eliminando dP/dx da equação (34.20) que dá a distribuição da velocidade, com o auxílio das equações (34.22) e (34.26) resulta:

$$\frac{v_x}{u_B} = \left\{ 1 - 3 \left[1 - \frac{2a(a-L)}{(2a-L)(a-x)} \right] \frac{y}{h} \right\} \left(1 - \frac{y}{h} \right). \quad (34.32)$$

A distribuição da pressão pode ser estudada sob uma forma adimensional representando-se como na Figura 34.3, $(P - P_0)/(\bar{P} - P_0)$ com x/L . Pode ocorrer con-tracorrente de óleo na região da pressão crescente principalmente nas proximidades da parede imóvel tal como no escoamento Couette (Fig. 32.4).

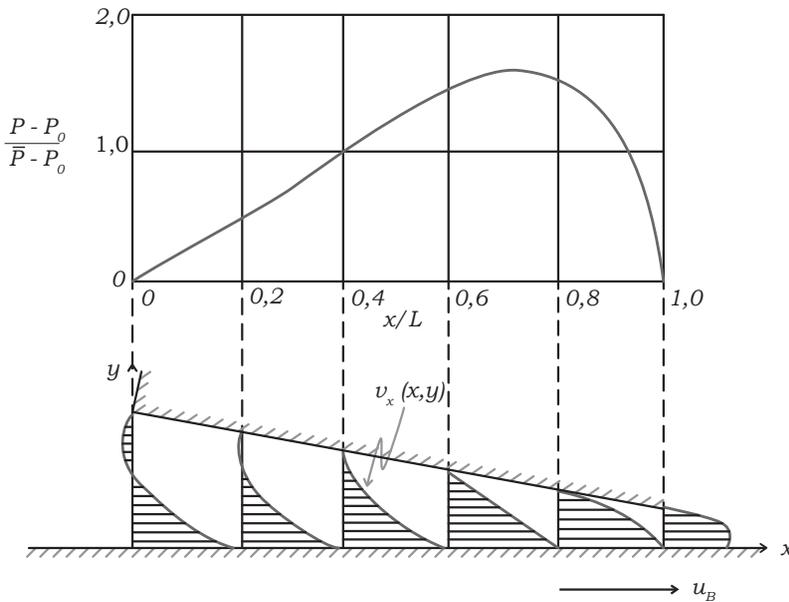


Figura 34.3

A cunha pode suportar pressões elevadas principalmente quando o ângulo α é pequeno. A equação (34.31) mostra que a pressão média é inversamente proporcional ao quadrado de α .

São mais usuais os mancais cilíndricos onde a cunha é formada por excentricidade entre o eixo e o mancal (Fig. 34.4). Se levarmos em conta a curvatura das superfícies, a análise do escoamento é bem mais difícil do que a do presente caso de superfícies planas.

O mancal concêntrico com o eixo (Fig. 34.5) tem como modelo ideal o escoamento de Couette entre duas placas paralelas. Neste caso não há formação de cunha e o mancal não pode suportar pressão.

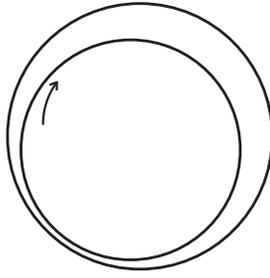


Figura 34.4

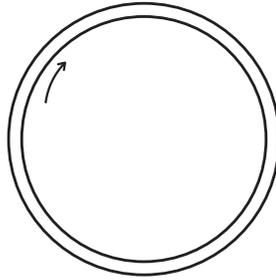


Figura 34.5

Tensões de cunha

A tensão em qualquer ponto do óleo que enche a folga pode ser obtida derivando a equação (34.20)

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \left(\frac{2y - h}{2\mu} \frac{dP}{dx} - \frac{u_B}{h} \right). \quad (34.33)$$

Fazendo $y = h$ podemos calcular a tensão de cisalhamento em um ponto do fluido em contato com a superfície da sapata

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{h}{2\mu} \frac{dP}{dx} - \frac{u_B}{h} \right). \quad (34.34)$$

A força de cisalhamento total por unidade de largura z da superfície da sapata é dada por

$$F_{v,0} = - \int_0^L \tau_0 dx = - \mu \int_0^L \left(\frac{h}{2\mu} \frac{dP}{dx} - \frac{u_B}{h} \right) dx. \quad (34.35)$$

Eliminando dP/dx com o auxílio das equações (34.22) a (34.26) e integrando temos:

$$F_{v,0} = \frac{2\mu u_B}{\alpha(2a-L)} \left[3L - (2a-1)\ell n \frac{a}{a-L} \right]. \quad (34.36)$$

Referências

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 5, 1958.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 6, 1960.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1961.

GARCEZ, L.N. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Edgard Blucher, Capítulo 19, vol. 1, 1960.

Análise dimensional do escoamento

A solução analítica da configuração do escoamento viscoso por meio das equações de Navier-Stokes só é possível nos casos muito simplificados, nos quais omitimos vários dos termos dessa equação. A solução dos problemas complexos é sempre baseada em dados experimentais; a análise bidimensional serve então para generalizar os resultados dessas experiências. Os métodos da análise dimensional têm como base o postulado de que as equações usadas para configurar o escoamento não dependem de um sistema de unidades empregado para exprimir os valores das grandezas físicas. Essas grandezas podem ser agrupadas em parâmetros adimensionais por diversos métodos. Os métodos que tornam sem dimensão as equações diferenciais que descrevem completamente um certo escoamento são os mais recomendados porque, desta maneira, formamos os grupos adimensionais com todas as grandezas que para isso afetam o escoamento. É claro que para isso precisamos conhecer as equações diferenciais e, às vezes, as ignoramos. Entretanto, frequentemente, é possível levar em conta todas as grandezas que afetam a configuração de um escoamento com um conhecimento superficial ou aproximado das equações e, se até isso desconhecemos, então os outros métodos de análise dimensional também não podem ser utilizados.

Vamos aplicar esses métodos à solução de dois casos gerais de escoamento incompressível e homogêneo de fluido newtoniano.

Escoamento confinado

Os três componentes da equação de Navier-Stokes e a equação da continuidade

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (35.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (35.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (35.3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (35.4)$$

onde P representa a diferença entre a pressão total e a pressão em repouso, são bastante para descrever o escoamento confinado (ou forçado), pois permitem calcular, em um dado instante, v_x, v_y, v_z e P em função de x, y, z , para dado fluido (dados ρ e μ). Este sistema de equações de derivadas parciais inclui as equações de movimento, que são de segunda ordem e não lineares. Portanto, a configuração analítica pura, satisfazendo a determinadas condições de contorno, é extremamente difícil. Soluções analíticas foram possíveis omitindo-se diversos termos ou mesmo equações inteiras em problemas particulares simples, tais como os do escoamento entre placas paralelas e duto reto. Soluções mais gerais, entretanto, incluem determinações experimentais e a correlação dos dados empíricos é facilitada e orientada pelos resultados da análise dimensional aplicada a todos os termos de todas as equações do sistema.

Para fixar ideias, admitamos um escoamento normal ao eixo de um cilindro de seção circular e comprimento infinito (Fig. 35.1). O fluido estende-se indefinidamente em todas as direções de modo que o escoamento pode ser considerado submerso ou confinado. O cilindro tem um diâmetro D e está em repouso, portanto, a velocidade do fluido na sua superfície é nulo. A corrente fluida suficientemente afastada do cilindro está animada de velocidade uniforme u e sujeita a pressão constante.

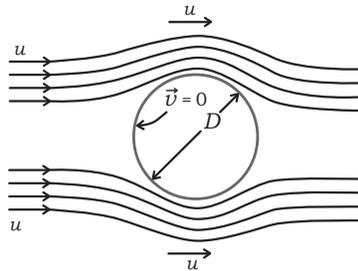


Figura 35.1

Para tornar adimensionais as equações e as condições de contorno dividimos:

$$\begin{aligned} x/D = x', \quad y/D = y', \quad z/D = z', \quad v_x/u = v'_x, \\ v_y/D = v'_y, \quad v_z/D = v'_z, \quad t/D \frac{u}{\nu} = t', \quad P/\rho u^2 = P'. \end{aligned} \tag{35.5}$$

Introduzimos essas novas grandezas adimensionais, para exemplificar, no componente x da equação de Navier-Stokes, (35.1), que resulta

$$\begin{aligned} \frac{\rho u^2}{D} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) \\ = -\rho \frac{u^2}{D} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \mu \frac{u}{D^2} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right). \end{aligned} \tag{35.6}$$

Dividindo ambos os membros $\rho u^2/D$, tornamos finalmente esta segunda expressão adimensional:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v'_x}{dt'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + \frac{\partial v'_x}{\partial z'} v'_z \\ & = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}_D} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right), \end{aligned} \quad (35.7)$$

onde Re_D é o símbolo do número de Reynolds calculado com o diâmetro do cilindro e com dimensão linear característica do escoamento. A equação da continuidade de massa sob forma adimensional é expressa por

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = 0, \quad (35.8)$$

enquanto as condições de contorno adimensionais são:

$$\text{escoamento não perturbado:} \quad v'_x = u/u = 1,$$

$$\text{superfície do cilindro:} \quad v'_x = v'_y = v'_z = 0.$$

Deste modo, a configuração do escoamento envolve a solução das seguintes equações:

$$v'_x = f_v(x', y', z', t', \text{Re}_D) \quad (35.9)$$

$$v'_y = f_v(x', y', z', t', \text{Re}_D) \quad (35.10)$$

$$v'_z = f_v(x', y', z', t', \text{Re}_D) \quad (35.11)$$

$$P' = f_p(x', y', z', t', \text{Re}_D) \quad (35.12)$$

onde x', y', z', t' são as variáveis independentes e Re_D funciona como parâmetro constante.

Essas mesmas relações funcionais servem para configurar outros tipos de escoamentos confinados; por exemplo, no escoamento em dutos retos, D representa o diâmetro interno do tubo e u a velocidade média Q/S . É evidente então que podemos ter diferentes expressões do número de Reynolds, dependendo da velocidade do escoamento e do comprimento do corpo sólido tomados como referências para tornar adimensionais as grandezas físicas. Qualquer delas, entretanto, deve representar a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas que atuam no escoamento, tal como mostramos na equação (18.2).

Nos escoamentos em que só atuam forças viscosas e forças de inércia, podemos dizer em geral que a configuração em cada ponto e em cada instante de um escoamento transiente só depende do número de Reynolds.

Escoamentos semelhantes

Consideremos dois cilindros de diâmetros D_1 e D_2 , expostos a duas correntes fluidas de velocidades não perturbadas u_1 e u_2 , os fluidos tendo diferentes propriedades físicas μ_1 , ρ_1 e μ_2 , ρ_2 (Fig. 35.2).

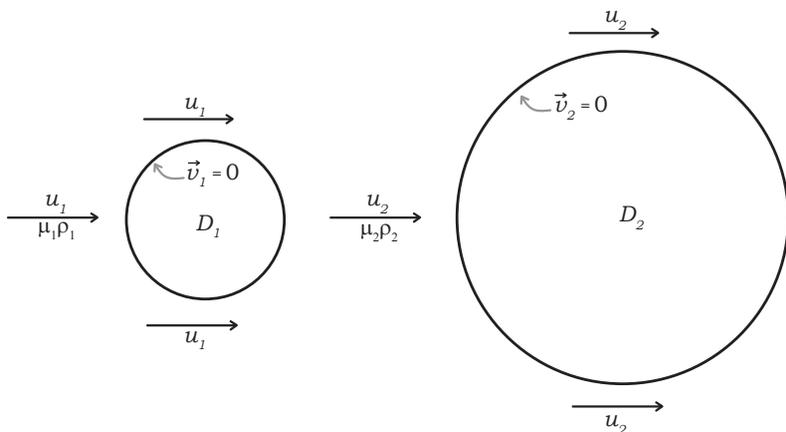


Figura 35.2

Ambos os escoamentos são evidentemente regidos pelas equações (35.11) e (35.12), i.e., as mesmas funções f representam os dois escoamentos. Quando o número de Reynolds tem o mesmo valor nos dois escoamentos, teremos os pontos semelhantes (pontos onde os valores das coordenadas adimensionais são os mesmos), os mesmos valores das velocidades e pressões adimensionais em torno dos dois cilindros. As grandezas físicas que em configuração adimensional – neste exemplo simples colocamos v'_x, v'_y, v'_z e P' com x', y', z' – tornam-se idênticas nas camadas de grandezas *semelhantes*. Podemos então concluir que os escoamentos confinados em torno do cilindro são semelhantes quando os números de Reynolds têm o mesmo valor. Neste caso, os campos de velocidades e pressões em torno dos cilindros serão semelhantes.

A semelhança dos campos de velocidades e pressões é chamado de *semelhança dinâmica*. Para que os escoamentos em torno ou através de corpos sólidos sejam em geral semelhantes é evidente ser necessário a *semelhança geométrica* dos contornos do corpo. Não serão semelhantes os escoamentos em torno de cilindros de seção circular e cilindros de seção prismática, como também não podem ser semelhantes os escoamentos no interior de tubos circulares e condutos de seção, por exemplo, triangular. Nesses casos, para um dado valor do número de Reynolds, não serão idênticos os valores de \vec{v}' e P' em pontos semelhantes. Os pontos semelhantes de mesmas coordenadas adimensionais x', y', z' também são chamados de *pontos correspondentes*.

É claro também que é necessário a *semelhança de condições de contorno* para que os escoamentos sejam completamente semelhantes. Por exemplo, quando um cilindro roda com velocidade linear u_c , a solução das equações diferenciais do escoamento devem satisfazer a condição de que na superfície do cilindro a velocidade do fluido tenha o mesmo módulo e a mesma direção do que a velocidade u_c . Neste caso, as equações funcionais (35.9) a (35.12) devem incluir o grupo adimensional \vec{v}'/u_c , que exprime mais uma condição de semelhança além do número de Reynolds.

A semelhança de rugosidade da superfície do cilindro ou da superfície interna do tubo é um outro exemplo de semelhança geométrica que pode ser importante quando

as superfícies são relativamente ásperas. Nesse caso é usual incluir nas relações funcionais o grupo ε/D , chamado rugosidade relativa, onde ε representa o “comprimento médio das projeções” existentes nas superfícies banhadas pelo fluido em escoamento. É claro que o emprego deste comprimento médio representa uma maneira grosseira de levar em conta a rugosidade de superfícies que, evidentemente, necessitam de mais do que uma dimensão linear para caracterizar o formato, a distribuição e os tamanhos das protuberâncias que constituem a rugosidade.

Escoamento transiente

No caso mais geral de escoamento confinado transiente, as condições de semelhança dinâmica devem incluir além da restrição de mesmo valor do número de Reynolds, a de mesmo valor do parâmetro adimensional t' . Por exemplo, se o cilindro submerso estiver sujeito a oscilações que obedecem a uma certa lei, o intervalo de tempo t pode representar o período de oscilações. O grupo $t' = ut/D$ tem o nome de número de Strouhal

$$Sh = ut/D. \quad (35.13)$$

Referências

ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.M. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 9, 1959.

LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Capítulo 2, 1959.

Número de Euler

É conveniente caracterizar o termo adimensional $-\partial P'/\partial x'$ do segundo membro da equação (35.7). Este termo representa adimensionalmente a variação de pressão ao longo do escoamento e recebe o nome de número de Euler:

$$Eu_{p,x} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} = \frac{D}{\rho\mu^2} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right). \quad (36.1)$$

Segue-se que a expressão vetorial pode ser reescrita como

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt'} = \vec{E}u_p + \frac{1}{Re_D} \nabla'^2 \vec{v}'. \quad (36.2)$$

No escoamento incompressível e homogêneo o número de Euler funciona como variável dependente, i.e., dependente do número de Reynolds, pois neste tipo de escoamento o valor da pressão não altera a configuração do escoamento. Na equação (36.2) o operador adimensional ∇'^2 é expresso por

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}. \quad (36.3)$$

Existem outros tipos de números de Euler que, em geral, representam as relações adimensionais entre as tensões e o termo ρu^2 . Considerando separadamente cada uma das tensões normais, equações (28.12) a (28.14) e tangenciais, (28.15) a (28.17), podemos torná-las adimensionais empregando as relações (35.5). Tomamos ainda como exemplo um escoamento incompressível e homogêneo e consideremos para ilustrar a tensão normal τ_{xx} e a de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{yx}$:

$$\tau_{xx} = P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} = -P\rho u^2 + 2\mu \frac{u}{D} \frac{\partial v'_x}{\partial x'}, \quad (36.4)$$

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{\mu u}{D} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial y'} + \frac{\partial v'_y}{\partial x'} \right). \quad (36.5)$$

Dividindo ambos os membros dessas expressões por ρu^2 resulta nos números de Euler

$$Eu_{\tau_{xx}} = \frac{\tau_{xx}}{\rho u^2} = \tau'_{xx} = -P' + \frac{2}{Re_D} \frac{\partial v'_x}{\partial x'}, \quad (36.6)$$

$$Eu_{\tau_{yx}} = \frac{\tau_{yx}}{\rho u^2} = \tau'_{yx} = \frac{1}{Re_D} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial y'} + \frac{\partial v'_y}{\partial x'} \right), \quad (36.7)$$

onde P' pode ser expresso pela equação (35.12) em função de x', y', z', t' e Re_D . Teríamos também outras expressões do número de Euler em relação a cada um dos componentes restantes do tensor τ .

Vemos que o número de Euler representa a relação entre as forças de inércia, que são proporcionais a ρu^2 , i.e.,

$$Eu = \tau / \rho u^2 = F_p / F_i. \quad (36.8)$$

Fator de atrito

Nas aplicações práticas, algumas das expressões do número de Euler são conhecidas com o nome de fator de atrito. Assim, no caso de escoamento permanente e uniforme em duto reto a equação (36.7) reduz-se a

$$Eu_{\tau_{yx}} = \frac{\tau_{yx}}{\rho u^2} = \frac{1}{Re_D} \frac{D}{u} \frac{dv_x}{dy}. \quad (36.9)$$

Na parede, chamando a tensão uniforme de τ_0 , temos:

$$Eu_{\tau_0} = \frac{\tau_0}{\rho u_0} = \frac{1}{Re_D} \frac{D}{u} \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_0. \quad (36.10)$$

Comparando esta expressão com a que define fator de atrito, $f = 8(\tau_0 / \rho u^2)$ vemos que

$$f = 8 Eu_{\tau_0}. \quad (36.11)$$

Para este caso de escoamento permanente e uniforme, a equação (36.1) pode ser expressa por

$$Eu_{p,x} = \frac{D}{\rho u^2} \frac{\Delta P}{L}. \quad (36.12)$$

Comparando com a equação (33.22), onde podemos omitir a ação da gravidade por se tratar de escoamento confinado, temos

$$f = 2 \left(\frac{D}{\rho u^2} \frac{\Delta P}{L} \right) = 2 Eu_p. \quad (36.13)$$

Portanto, a “perda” de carga que calculamos pela equação (33.23), $f(L/D)(u^2/2g)$, pode ser expresso por

$$h_a = Eu_p \frac{L}{D} \frac{u^2}{g} = 4 Eu_{\tau_0} \frac{L}{D} \frac{u^2}{g}, \quad (36.14)$$

onde $h_a = \Delta P / \rho g$, tal como na equação (24.11). Nessas equações, desde que os dutos tenham paredes lisas, o número de Euler é função exclusivamente do número de Reynolds. O número de Euler em si não afeta a configuração porque o escoamento é incompressível e homogêneo.

Os grupos adimensionais tanto podem ser formados pelos diversos termos das equações do movimento quanto pelas duas condições de contorno. O grupo $\tau_0 / \rho u^2$ pode ser considerado como formado pela condição de que na parede $\tau = \tau_0$, constante, neste escoamento uniforme.

Escoamento não confinado

No caso de escoamento com superfície livre não podemos omitir a atuação da força de campo e a pressão P deve representar a pressão total. Segue-se que além das forças de inércia e das forças viscosas, que são as únicas que atuam no escoamento incompressível, homogêneo, confinado, devemos levar em conta as forças gravitacionais. Não basta, portanto, o número de Reynolds para descrever o escoamento na superfície livre.

Consideremos, para exemplificar, a componente y da equação de Navier-Stokes, estando o eixo cartesiano y orientado na direção vertical contrária à da aceleração da gravidade

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right). \quad (36.15)$$

Substituindo nesta equação as relações adimensionais (35.5), resulta

$$\frac{\rho u^2}{D} \frac{Dv'_y}{Dt} = -\rho g - \frac{\rho u^2}{D} \frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\mu u}{D^2} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} \right), \quad (36.16)$$

e dividindo ambos os membros por $\rho u^2 / D$,

$$\frac{Dv'_y}{Dt'} = -\frac{8D}{u^2} - \frac{\partial P'}{\partial y'} + \frac{\mu}{Du\rho} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} \right). \quad (36.17)$$

Vemos que, para dadas condições de contorno, a configuração do escoamento depende neste caso dos grupos $\mu / Du\rho = 1 / \text{Re}_D$ e gD / u^2 , que representa o inverso do número de Froude, $Fr = u^2 / gD$.

Portanto, a configuração do escoamento em torno de um cilindro da série circular parcialmente submerso em um fluido incompressível e homogêneo é função constante do número de Reynolds como de um outro grupo chamado de número de Froude. Este número representa a razão entre forças de inércia e forças gravitacionais, i.e.,

$$Fr = u^2 / gD = F_i / F_g. \quad (36.18)$$

Número de Weber

Em certos casos de escoamento com superfícies lineares livres ou interfaces líquido-líquido, é importante levar em conta a atuação das forças de pressão superficiais que

estabelecem mais uma condição de contorno. A atuação dessas forças é usualmente representada pela chamada “tensão superficial” σ , que tem unidade de energia por unidade de área ou, o que é a mesma coisa, força por unidade de comprimento L . O número de Weber representa a razão entre forças de pressão superficial e as forças de inércia, i.e.,

$$We = \sigma / \rho u^2 L = F_p / F_i. \quad (36.19)$$

O número de Weber é importante em estudos tais como o da formação de camadas na superfície de líquidos, ou no da “atomização” de jatos líquidos por meio de bocais de borrifo. Nesses estudos é importante também o número de Froude.

Referências

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 12, 1957.

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.M; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 5, 1959.

Escoamento turbulento

A turbulência foi observada pela primeira vez no escoamento dentro de condutos (experiência de Reynolds) (Fig. 18.3). No escoamento turbulento, superpõe-se ao movimento primário da veia fluida movimentos flutuantes de mistura ou turbilhonamento. Essas flutuações fazem com que o fluido tenha uma viscosidade aparente que pode alcançar valores milhares de vezes maior do que a viscosidade real, propriedade do fluido. Segue-se que a força que mantém o escoamento turbulento em contato com contornos é muito maior do que a que mantém o escoamento laminar. Por outro lado, a maior resistência experimentada pelo escoamento turbulento em contato com difusores, asas de avião e palhetas de turbo compressores, permite que nesses aparelhos sejam obtidos maiores aumentos de pressão sem a separação da camada-limite, que ocorreria se o escoamento fosse laminar. Esta separação não permitiria maior recuperação de energia nos difusores e tornaria insatisfatória a operação das asas e palhetas.

Grandezas instantâneas, flutuantes e médias

Em um certo ponto de um fluido em escoamento turbulento (ponto 0, Fig. 37.1) a velocidade varia com o tempo tanto em módulo quanto em direção. Essas velocidades instantâneas podem ser desdobradas em duas partes, a velocidade média temporal \bar{v} e a velocidade flutuante v' .

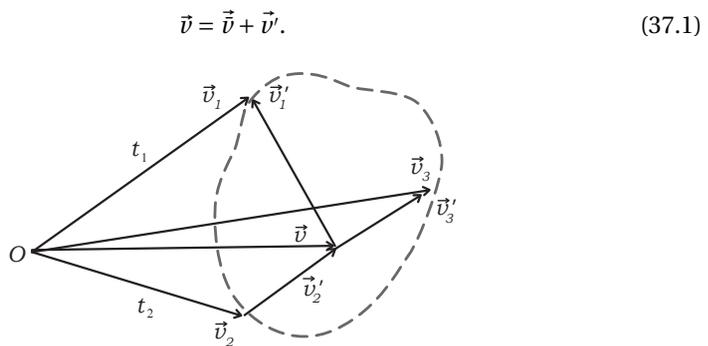


Figura 37.1

Os componentes cartesianos correspondentes são expressos pelas equações (18.4) a (18.6). Do mesmo modo, a pressão em um ponto é dada por:

$$P = \bar{P} + P', \quad (37.2)$$

onde P é a pressão instantânea, \bar{P} a média temporal e P' a flutuante.

As grandezas médias temporais são expressas por:

$$\bar{G} = \frac{1}{\delta t} \int_{\delta t} G dt, \quad (37.3)$$

onde o intervalo de tempo δt é suficientemente longo para que as grandezas médias sejam independentes do tempo. De acordo com essa definição de média temporal é evidente que:

$$\bar{G}' = \frac{1}{\delta t} \int_{\delta t} G' dt = 0, \quad (37.4)$$

onde G' pode representar a velocidade flutuante ou qualquer de suas componentes cartesianas, a pressão ou a massa específica, no caso de escoamento compressível. A Figura 37.1 mostra que a integral em relação ao tempo de \vec{v}' é nula.

Em geral a grandeza flutuante é de alta intensidade, de modo que basta um intervalo de tempo δt de poucos segundos para que os valores médios temporais sejam de fato independentes do tempo. Para a turbulência em grande escala que se observa na atmosfera terrestre o intervalo δt tem que ser bem maior.

Teoria estatística da turbulência

No escoamento turbulento a velocidade v é uma função contínua do tempo e do espaço. A Figura 37.2 mostra um oscilograma da flutuação do componente v_x em relação ao tempo em um dado ponto do escoamento turbulento. A velocidade \bar{v} é também uma função aleatória, porque o seu valor instantâneo não pode ser determinado a partir das grandezas médias que afetam o escoamento.

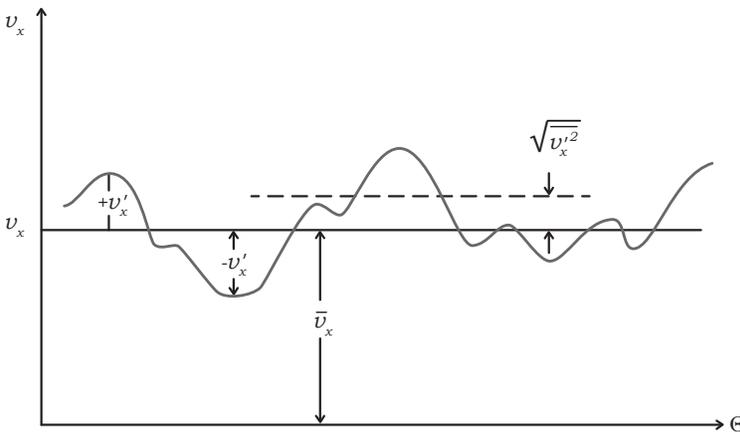


Figura 37.2

Os valores das grandezas flutuantes são totalmente arbitrários, portanto, o número de observações n do valor de cada uma dessas grandezas se distribui segundo uma curva normal, Gaussiana erro. A Figura 37.3 exemplifica esta distribuição no caso dos componentes de velocidade. O valor mais frequente de velocidade é nulo.

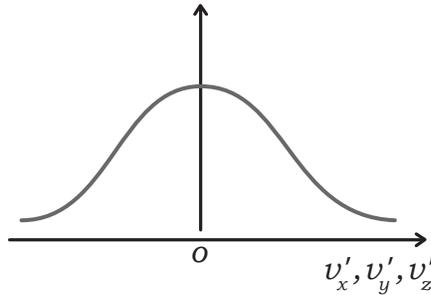


Figura 37.3

Coefficientes de correlação

A frequência da distribuição das grandezas flutuantes pode ser estudada por coeficientes de correlação. Um desses coeficientes é definido por

$$R_t = \frac{\overline{v'_{x,t} v'_{x,t+\delta t}}}{\overline{v'^2_{x,t}}}, \quad (37.5)$$

onde $v'_{x,t}$ e $v'_{x,t+\delta t}$ são os componentes x da velocidade flutuante em dois instantes consecutivos. Este coeficiente correlaciona o efeito de $v'_{x,t}$ em $v'_{x,t+\delta t}$; se δt é nulo o coeficiente é igual a um e, se δt é suficientemente grande, R_t torna-se nulo, i.e., $v'_{x,t}$ deixa de afetar $v'_{x,t+\delta t}$, ou em outras palavras, deixa de existir uma correlação entre essas velocidades consecutivas no tempo, o coeficiente R_t segue o ponto de vista lagrangiano de acompanhar as trajetórias dos elementos fluidos.

Um coeficiente que segue o ponto de vista euleriano é definido por

$$R_{x,v'_x} = \frac{v'_{x,x} v'_{x,x+\delta x}}{\sqrt{\overline{v'^2_{x,x}}} \sqrt{\overline{v'^2_{x,x+\delta x}}}}, \quad (37.6)$$

onde $v'_{x,x}$ e $v'_{x,x+\delta x}$ são os componentes x da velocidade flutuante em dois pontos separados de δx na direção do eixo x (Fig. 37.4a). Considerando os componentes x da velocidade em dois pontos separados de δy e δz (Fig. 37.4b e 37.4c) temos os seguintes coeficientes de correlação:

$$R_{y,v'_x} = \frac{v'_{x,y} v'_{x,y+\delta_y}}{\sqrt{v'^2_{x,y}} \sqrt{v'^2_{x,y+\delta_y}}}, \quad (37.7)$$

$$R_{z,v'_x} = \frac{v'_{x,z} v'_{x,z+\delta_z}}{\sqrt{v'^2_{x,z}} \sqrt{v'^2_{x,z+\delta_z}}}. \quad (37.8)$$

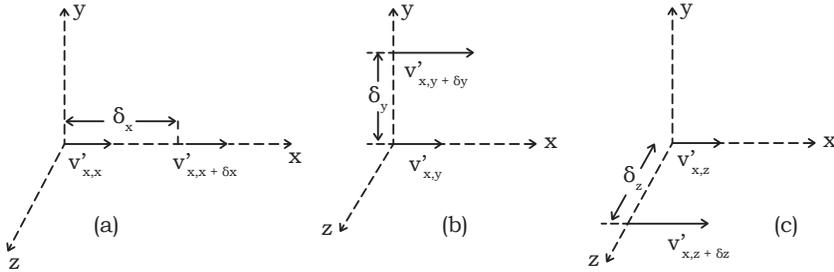


Figura 37.4

Correlações análogas podem ser definidas para os componentes v'_y e v'_x .

Podemos também definir coeficientes de correlação entre os componentes flutuantes v'_x , v'_y e v'_z em um dado ponto.

$$R_{v'_x v'_y} = \frac{\overline{v'_x v'_y}}{\sqrt{v'^2_x} \sqrt{v'^2_y}}, \quad (37.9)$$

$$R_{v'_y v'_z} = \frac{\overline{v'_y v'_z}}{\sqrt{v'^2_y} \sqrt{v'^2_z}}, \quad (37.10)$$

$$R_{v'_x v'_z} = \frac{\overline{v'_x v'_z}}{\sqrt{v'^2_x} \sqrt{v'^2_z}}. \quad (37.11)$$

Intensidade de turbulência

A intensidade de turbulência é uma medida do módulo de flutuação em relação a um valor médio. Sendo a grandeza flutuante uma variável aleatória, sua medida pode ser adequadamente representada pelo parâmetro *desvio médio geométrico*; por exemplo, no caso da componente x da velocidade flutuante,

$$\sqrt{\overline{v'^2_x}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n v'^2_x}, \quad (37.12)$$

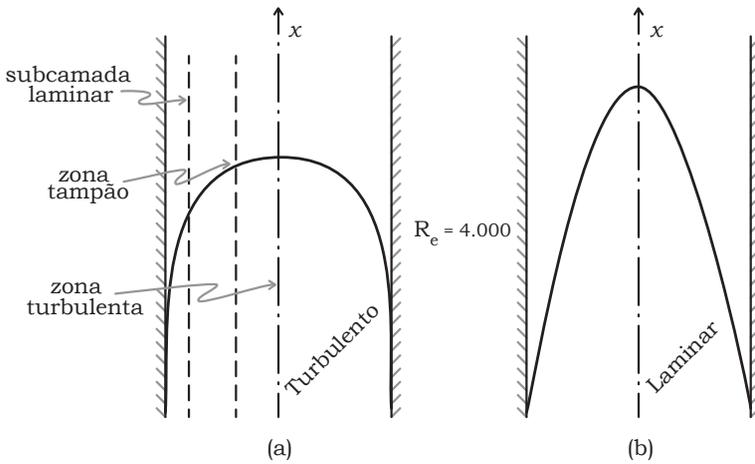


Figura 37.5

onde n é o número de observações do valor de v'_x . Se as flutuações v'_x forem medidas de modo contínuo,

$$\overline{v_x'^2} = \frac{1}{\delta t} \int_{\delta t} v_x'^2 dt, \quad (37.13)$$

i.e., $\sqrt{\overline{v_x'^2}}$ é o raio de geração da área representativa da flutuação.

Enquanto as médias temporais \bar{v}'_x , \bar{v}'_y e \bar{v}'_z são nulas, as médias quadráticas são sempre finitas e são componentes de intensidade de turbulência. É usual exprimir os componentes da intensidade da turbulência como fração da velocidade média temporal, i.e., por:

$$IT_x = \sqrt{\overline{v_x'^2}} / \bar{v}_x, \quad IT_y = \sqrt{\overline{v_y'^2}} / \bar{v}_y, \quad IT_z = \sqrt{\overline{v_z'^2}} / \bar{v}_z. \quad (37.14)$$

Levando em conta os três componentes, a intensidade de turbulência é usualmente definida pela relação,

$$IT = \frac{\sqrt{1/3(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})}}{\bar{v}}. \quad (37.15)$$

No escoamento em condutos forçados, como os tubos e túneis de vento, é comum referir a intensidade da turbulência como fração da velocidade média $u = Q/S$.

Escalas de turbulência

A escala de turbulência pode ser definida por intermédio de coeficientes de correlação:

$$L_t = \sqrt{\overline{v_x'^2}} \int_0^\infty R_t dt, \quad (37.16)$$

$$L_x = \int_0^\infty R_{x,v_x'} dx, \quad (37.17)$$

$$L_y = \int_0^\infty R_{y,v_y'} dy, \quad (37.18)$$

$$L_z = \int_0^\infty R_{z,v_z'} dz. \quad (37.19)$$

Turbulência isotrópica e homogênea

A turbulência é isotrópica quando os componentes da intensidade nas três direções têm o mesmo valor, i.e., por exemplo,

$$\overline{v_x'^2} = \overline{v_y'^2} = \overline{v_z'^2}. \quad (37.20)$$

Segue-se que as flutuações são perfeitamente caóticas, não havendo qualquer correlação entre os componentes da flutuação em diferentes direções, i.e.,

$$\overline{v_x' v_y'} = \overline{v_x' v_z'} = \overline{v_y' v_z'} = 0. \quad (37.21)$$

A turbulência é dita homogênea quando as grandezas médias são independentes da posição no fluido em escoamento caótico. As suposições de escoamento isotrópico e homogêneo introduzem importantes simplificações no estado estatístico da turbulência.

Perfil da velocidade em tubos

No escoamento através de tubos, para o mesmo valor do número de Reynolds $Du\rho/\mu$, o perfil da velocidade turbulenta é mais achatado do que o perfil laminar (Fig. 37.5). O perfil turbulento é usualmente traçado com a velocidade média temporal e chamamos de escoamento turbulento permanente ou *escoamento quasi-permanente* aquele em que as grandezas médias temporais não variam com o tempo.

O escoamento dentro do tubo pode ser considerado como unidirecional, i.e., $\bar{v}_r = 0$ e $\bar{v}_\psi = 0$, portanto,

$$v_x = \bar{v}_x + v_x', \quad (37.22)$$

$$v_r = v_r', \quad (37.23)$$

$$v_\psi = v_\psi'. \quad (37.24)$$

As determinações experimentais mostram que na região central do tubo as flutuações são mais isotrópicas do que nas cercanias da parede, onde as flutuações na direção axial x são mais intensas do que as radiais (tendência ao isotropismo). Junto à parede, as flutuações são amortecidas pelas forças viscosas e se aproximam de zero. Na subcamada laminar atuam as forças viscosas, enquanto na zona turbulenta predominam as forças de inércia; em uma zona intermediária, tanto as forças viscosas quanto as de inércia são importantes.

Muitos cálculos hidráulicos importantes podem ser feitos com a velocidade média temporal, ignorando-se a velocidade flutuante do mesmo modo que se pode desprezar o efeito dos movimentos dos passageiros na distância que um navio percorre em um certo tempo.

Medida das grandezas flutuantes

A velocidade média temporal pode ser determinada por um tubo de Pitot, exceto nas proximidades de contornos sólidos, onde o tamanho do instrumento não permite a medida precisa do gradiente de velocidade, que nestas regiões é elevado. As grandezas flutuantes, como velocidade, pressão e massa específica, podem ser medidas com o anemômetro de fio quente. Neste instrumento o resfriamento de fios muito finos e aquecidos por corrente elétrica é função da velocidade e das propriedades físicas do fluido em escoamento em contato com o fio.

Regras das operações com grandezas médias temporais

Chamamos de f e g duas variáveis dependentes cuja média temporal deve ser calculada. Chamemos de s qualquer uma das variáveis independentes x , y , z e temos as seguintes regras válidas:

$$\begin{aligned}\overline{f + q} &= \bar{f} + \bar{q}, \\ \overline{f \times q} &= \bar{f} \times \bar{q}, \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \\ \overline{\int f ds} &= \int \bar{f} ds.\end{aligned}$$

Referências

BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dossat, Capítulo 20, 1960.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 18, 1960.

ADDISON, H. *A Treatise on Applied Hydraulics*, John Wiley & Sons, Capítulo 3, 1957.

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 7, 1958.

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1960.

KNUNDSSEN, J.G.; KATZ, D.L. *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 5, 1958.

Tensões de Reynolds

As velocidades instantâneas são responsáveis por tensões aparentes que se superpõem às tensões moleculares ou viscosas. Consideremos o fluxo de quantidade de movimento através de uma face de um volume de controle cartesiano de uma corrente turbulenta incompressível e quasi-permanente. Através de uma área de seção normal à direção x o fluxo instantâneo de quantidade de movimento x na direção x é dado por:

$$M_{xx} = M_x v_x = \rho v_x v_x = \rho v_x^2, \quad (38.1)$$

enquanto o fluxo médio correspondente é expresso por

$$\overline{M_{xx}} = \overline{\rho v_x^2} = \overline{\rho(\bar{v}_x + v'_x)^2} = \overline{\rho(\bar{v}_x^2 + 2\bar{v}_x v'_x + v_x'^2)}. \quad (38.2)$$

Seguindo as regras de operação com grandezas médias temporais, temos:

$$\overline{M_{xx}} = \overline{\rho v_x^2} + 2\overline{\rho \bar{v}_x v'_x} + \overline{\rho v_x'^2}, \quad (38.3)$$

onde,

$$\overline{\rho v_x^2} = \rho \overline{v_x^2}, \quad (38.4)$$

$$2\overline{\rho \bar{v}_x v'_x} = 2\rho \bar{v}_x \overline{v'_x} = 0, \quad (38.5)$$

$$\overline{\rho v_x'^2} = \rho \overline{v_x'^2}, \quad (38.6)$$

portanto,

$$\overline{M_{xx}} = \rho(\overline{v_x^2} + \overline{v_x'^2}). \quad (38.7)$$

O fluxo instantâneo de quantidade de movimento y na direção x é:

$$M_{xy} = M_y v_x = \rho v_y v_x, \quad (38.8)$$

sendo que o fluxo médio é

$$\overline{M_{xy}} = \overline{\rho v_y v_x} = \overline{\rho(\bar{v}_y + v'_y)(\bar{v}_x + v'_x)} = \overline{\rho(\bar{v}_y \bar{v}_x + \bar{v}_y v'_x + v'_y \bar{v}_x)}. \quad (38.9)$$

Analogamente, o fluxo médio da quantidade de movimento z na direção x é dado por

$$\overline{M}_{xz} = \rho(\bar{v}_z \bar{v}_x + \overline{v'_y v'_z}). \quad (38.10)$$

Os três componentes do fluxo de quantidade de movimento na direção x que passam através do elemento de área do volume de controle, dados pelas equações (38.7), (38.9) e (38.10), têm dimensão de força por unidade de área e representam tensões.

Esses fluxos de quantidade de movimento são equilibrados por tensões opostas que o meio fluido exerce no volume de controle para que ele não sofra acelerações; portanto,

$$\bar{\tau}_{xx} = -\overline{M}_{xx} = -\rho(\overline{v_x^2} + \overline{v_x'^2}), \quad (38.11)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\overline{M}_{xy} = -\rho(\bar{v}_y \bar{v}_x + \overline{v'_y v'_x}), \quad (38.12)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = -\overline{M}_{xz} = -\rho(\bar{v}_z \bar{v}_x + \overline{v'_z v'_x}), \quad (38.13)$$

onde $\bar{\tau}_{xx}$ é uma tensão normal e $\bar{\tau}_{xy}$ e $\bar{\tau}_{xz}$ são tensões de cisalhamento. Vemos que a superposição de flutuações no escoamento médio produz três tensões adicionais

$$(\bar{\tau}_{xx})_t = -\rho \overline{v_x'^2}, \quad (38.14)$$

$$(\bar{\tau}_{xy})_t = -\rho \overline{v'_x v'_y}, \quad (38.15)$$

$$(\bar{\tau}_{xz})_t = -\rho \overline{v'_x v'_z}, \quad (38.16)$$

que atuam na superfície elementar normal à direção x . Podemos escrever expressões correspondentes para as áreas normais às direções y e z formando, deste modo, as nove componentes do tensor turbulento.

Mostramos a seguir que a média temporal dos produtos das velocidades flutuantes é, geralmente, diferente de zero. No caso da tensão normal, eq. (38.14), o quadrado da velocidade flutuante é sempre positivo, portanto, a média do quadrado é maior do que zero. Considerando qualquer das tensões de cisalhamento, tal como a expressa pela eq. (38.15), o termo $-\rho \overline{v'_x v'_y}$ pode ser interpretado como equivalente à taxa de transferência de quantidade de movimento x através de uma superfície normal ao eixo y . Na Fig. 38.1 representamos o perfil de velocidade média $\bar{v}_x = f(y)$ em um escoamento onde $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$ e $d\bar{v}_x/dy > 0$, e daí mostramos que $\overline{v'_x v'_y} = 0$.

As partículas que sobem animadas de velocidade turbulenta v'_y , vão para uma camada superior partindo de uma camada inferior, onde prevalece uma velocidade \bar{v}_x menor. Como no global essas partículas preservam sua velocidade original \bar{v}_x , haverá forçosamente o aparecimento de velocidades negativas $-v_x$ na camada superior. Inversamente, as partículas que se dirigem para baixo, animadas da velocidade flutuante $-v'_y$, provocam o aparecimento de velocidades positivas $+v'_x$ nas camadas inferiores. O resultado total dessas transferências é associar valores positivos de v'_y com valores negativos de v'_x e, valores negativos de v'_y com valores positivos de v'_x ; segue-se que a média temporal $\overline{v'_x v'_y}$ é negativa, i.e., é diferente de zero. Consequentemente, a tensão de cisalhamento $-\rho \overline{v'_x v'_y}$ é positiva, i.e., tem o mesmo sinal que a tensão laminar $\mu dv_x/dy$.

O fato de $\overline{v'_x v'_y}$ não ser nulo significa que *existe uma correlação* entre as flutuações longitudinal e transversal da velocidade, em um dado ponto.

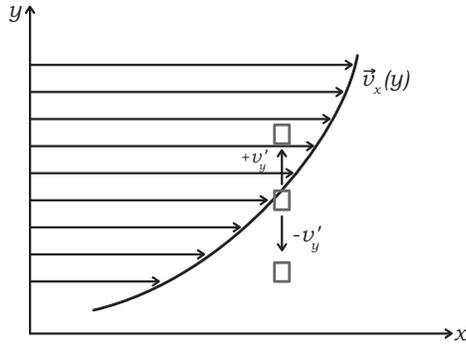


Figura 38.1

Equação da continuidade de escoamento turbulento

A equação da continuidade de massa do escoamento turbulento e incompressível é expressa pela equação (6.12)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (6.13)$$

onde os componentes cartesianos da velocidade representam valores instantâneos. Introduzindo a hipótese da decomposição das velocidades em componentes médios temporais e flutuantes, substituindo esses valores decompostos na equação (6.12), tomando as médias temporais de todos os termos, observando as regras e levando em conta que $\overline{\partial v'_x / \partial x} = \overline{\partial v'_y / \partial y} = \overline{\partial v'_z / \partial z} = 0$ resulta:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0. \quad (38.17)$$

A partir das equações (6.12) e (38.17) vemos que:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0. \quad (38.18)$$

Segue-se que tanto as componentes médias temporais como as flutuantes obedecem à equação da continuidade de massa.

Equações de Navier-Stokes do escoamento turbulento

Considerando um escoamento incompressível de fluido newtoniano e combinando as equações (31.1) a (31.3) com a equação da continuidade, (6.12), resulta:

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (v_x v_z)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x, \quad (38.19)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial (v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y^2}{\partial y} + \frac{\partial (v_y v_z)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y, \quad (38.20)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial (v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial v_z^2}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z. \quad (38.21)$$

Substituindo nessas equações as suposições de que as grandezas instantâneas podem ser desdobradas na parte média e na parte flutuante, formando as médias e simplificando com o auxílio da equação (38.17), temos

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{v}_x \\ &\quad - \rho \left(\frac{\partial \overline{v_x'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_x' v_z'}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (38.22)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v}_y \\ &\quad - \rho \left(\frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y' v_z'}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (38.23)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{v}_z \\ &\quad - \rho \left(\frac{\partial \overline{v_x' v_z'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y' v_z'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z'^2}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (38.24)$$

Comparando essas últimas expressões com as equações de Navier-Stokes de escoamento permanente, (31.1) a (31.3), vemos que ambas são de mesma soma no primeiro membro e nos três primeiros termos do segundo membro, desde que os componentes v_x , v_y e v_z e a pressão P sejam substituídos pelos valores médios temporais correspondentes; entretanto, as equações (38.22) a (38.24) têm termos adicionais que dependem da flutuação turbulenta do escoamento. Esses termos adicionais podem ser interpretados como componentes da tensão turbulenta ou de Reynolds. Deste modo, as equações podem ser reescritas,

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{v}_x \\ &\quad + \left[\frac{\partial (\bar{\tau}_{xx})_t}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{xy})_t}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{xz})_t}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (38.25)$$

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v}_y + \left[\frac{\partial (\bar{\tau}_{yx})_t}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{yy})_t}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{yz})_t}{\partial z} \right], \quad (38.26)$$

$$\rho \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{v}_z + \left[\frac{\partial (\bar{\tau}_{zx})_t}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{zy})_t}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{zz})_t}{\partial z} \right]. \quad (38.27)$$

O tensor que representa a tensão turbulenta é idêntico ao que representa o fluxo da quantidade de movimento do escoamento permanente, expressão (21.2), i.e.,

$$\begin{vmatrix} (\tau_{xx})_t & (\tau_{xy})_t & (\tau_{xz})_t \\ (\tau_{xy})_t & (\tau_{yy})_t & (\tau_{yz})_t \\ (\tau_{xz})_t & (\tau_{yz})_t & (\tau_{zz})_t \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \rho \overline{v_x'^2} & \rho \overline{v_x' v_y'} & \rho \overline{v_x' v_z'} \\ \rho \overline{v_x' v_y'} & \rho \overline{v_y'^2} & \rho \overline{v_y' v_z'} \\ \rho \overline{v_x' v_z'} & \rho \overline{v_y' v_z'} & \rho \overline{v_z'^2} \end{vmatrix}. \quad (38.28)$$

As tensões de Reynolds somam-se às tensões viscosas do escoamento laminar, portanto a tensão total $\bar{\tau} = \bar{\tau}_e + \bar{\tau}_t$ tem os seguintes componentes:

$$\bar{\tau}_{xx} = -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho \overline{v_x'^2}, \quad (38.29)$$

$$\bar{\tau}_{yy} = -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \rho \overline{v_y'^2}, \quad (38.30)$$

$$\bar{\tau}_{zz} = -\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \rho \overline{v_z'^2}, \quad (38.31)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) - \rho \overline{v_x' v_y'}, \quad (38.32)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) - \rho \overline{v_y' v_z'}, \quad (38.33)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} \right) - \rho \overline{v_x' v_z'}. \quad (38.34)$$

Para que essas equações do movimento turbulento forneçam resultados práticos é necessário relacionar os componentes médios com os flutuantes. Essas relações só podem ser obtidas de maneira empírica.

Condições de contorno

As soluções das equações do movimento turbulento devem satisfazer as mesmas condições de contorno que regem as equações de escoamento permanente. Nas paredes

todos os componentes da velocidade devem se anular. Junto às paredes existe uma camada fixa que comporta-se essencialmente como em escoamento laminar. Nesta subcamada laminar as tensões de Reynolds são desprezíveis e predominam as tensões viscosas. Mais afastada da parede segue-se uma zona tampão onde as flutuações da velocidade provocam o aparecimento de tensões turbulentas comparáveis com as viscosas. Ainda mais distante de paredes encontramos uma zona onde as tensões de Reynolds se sobrepujam às viscosas, é a zona turbulenta propriamente dita.

Embora a subcamada laminar seja usualmente de espessura muito pequena, é de importância capital porque nela situa-se uma grande resistência às transferências de quantidade de movimento, calor ou massa.

Referências

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 7, 1958.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 18, 1960.

Expressões da tensão de Reynolds

A configuração do escoamento turbulento por meio das equações (38.25) a (38.27) depende da relação entre as tensões de Reynolds produzidas pelas flutuações e as componentes da velocidade média temporal. Estabelecida esta relação entre τ_t e \bar{v} resultam equações diferenciais que são os pontos de partida dos cálculos do escoamento médio. Entretanto, as hipóteses que estabelecem τ_t em função de \bar{v} incluem suposições que não são capazes de analisar cabalmente um único caso de escoamento turbulento. Vejamos algumas dessas hipóteses.

Viscosidade turbulenta de Boussinesq

Esta hipótese relaciona a tensão de Reynolds com o gradiente de velocidade através de uma expressão análoga a que define a viscosidade no escoamento laminar:

$$(\bar{\tau}_{yx}) = \varepsilon \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \quad (39.1)$$

onde ε é chamado de viscosidade turbilhonar, aparente, virtual ou coeficiente de mistura que tem as mesmas unidades que a viscosidade dinâmica μ do fluido. O coeficiente ε , entretanto, não é uma propriedade do fluido mas varia aproximadamente com a primeira potência da velocidade, o que pode ser visto pela equação (39.1), onde demonstra-se empiricamente que a tensão turbulenta varia aproximadamente com o quadrado da velocidade. Então, a substituição das expressões do tipo da equação (39.1) nas equações do movimento não conduz a um resultado prático, porque ε varia com a posição do fluido e esta variação não é diretamente conhecida.

Comprimento de mistura de Prandtl

O conceito de comprimento de mistura de Prandtl pode ser mais facilmente explicado considerando-se um escoamento turbulento incompressível, homogêneo e plano, no qual a velocidade na direção x varia somente na direção y , i.e., $\bar{v}_x = f(y)$; $\bar{v}_y = 0$ e $\bar{v}_z = 0$. Neste caso, diferente de zero é a tensão

$$(\bar{\tau}_{xy})_t = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \varepsilon \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \quad (39.2)$$

Com um mecanismo simplificado do escoamento turbulento, Prandtl admitiu que as partículas fluidas se aglomeram e os aglomerados deslocam-se tanto na direção longitudinal quanto na transversal retendo nesses percursos suas quantidades de movimento paralelas à direção principal do escoamento x . Admite-se que esses aglomerados, por exemplo, vêm de uma camada $(y_1 - l)$, (Fig. 39.1), e têm velocidade $\bar{v}_x(y_1 - l)$, percorrem a distância l na direção transversal; esta distância é chamada de comprimento de mistura. Ao chegar à nova camada y_1 o aglomerado está animado de uma velocidade menor do que a que ali prevalece e nesse percurso $v'_y > 0$. A diferença entre as velocidades é dada por:

$$\Delta v_{x,1} = \bar{v}_x(y_1) - \bar{v}_x(y_1 - l). \quad (39.3)$$

Desenvolvendo a função $v_x(y_1 - l)$ segundo a série de Taylor e desprezando os termos de ordem maior que a primeira (l pequeno), temos:

$$\Delta v_{x,1} = \bar{v}_x(y_1) - \bar{v}_x(y_1 - l) = \ell \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)_1. \quad (39.4)$$

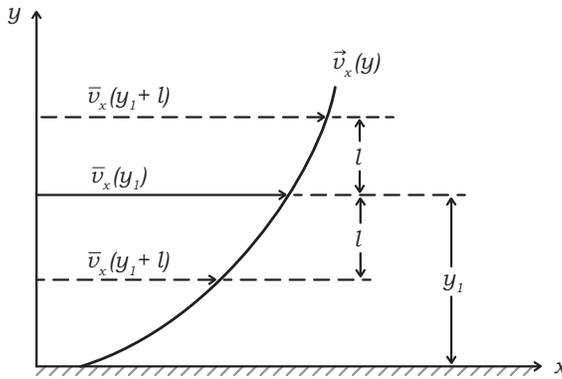


Figura 39.1

Analogamente, o aglomerado que parte de $y_1 + l$ e chega em y_1 possui uma velocidade maior do que a da nova camada e a diferença é expressa por:

$$\Delta v_{x,2} = \bar{v}_x(y_1 + \ell) - \bar{v}_x(y) = \ell \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)_1. \quad (39.5)$$

Assim, o movimento de um aglomerado da camada $y_1 + l$ para a camada y_1 , resulta em $v'_y < 0$.

Prandtl admitiu que essas diferenças de velocidades são responsáveis pela velocidade flutuante v'_x ou y_1 , portanto, a média temporal do valor absoluto dessa flutuação é dado por:

$$\overline{|v'_x|} = \frac{1}{2} (|\Delta v_{x,1}| + |\Delta v_{x,2}|) = \ell \left| \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)_1 \right|. \quad (39.6)$$

De acordo com esta expressão, o comprimento de mistura l pode ser interpretado fisicamente como a distância transversal que deve ser percorrida por um aglomerado de elementos fluidos que caminha com sua velocidade original para tornar a diferença entre a sua velocidade e a velocidade na nova posição igual a flutuante transversal média.

Este mecanismo simplificado mostra que as flutuações longitudinais são produzidas pelas flutuações transversais. Do mesmo modo, Prandtl admitiu que as flutuações transversais são produzidas pelas longitudinais e que existe uma proporcionalidade entre v'_x e v'_y , i.e.,

$$\overline{|v'_y|} = \text{const.} \cdot \overline{|v'_x|} = \text{const.} \cdot \ell \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \quad (39.7)$$

De posse de expressões de $|v'_x|$ e $|v'_y|$ precisamos agora, para calcular pela equação (39.2), determinar a expressão de $\overline{v'_x v'_y}$. Este produto é negativo, pois os v'_y positivos dos aglomerados que chegaram na camada y_1 vindo da camada inferior $y_1 - l$ produzem principalmente v'_x negativos, pois vêm de camadas mais lentas e, por raciocínio análogo, podemos dizer que os valores negativos de v'_y estão preferencialmente associados com os valores positivos de v'_x . Portanto, sendo o produto $\overline{v'_x v'_y}$ diferente de zero e negativo, podemos escrever

$$\overline{v'_x v'_y} = -C \overline{|v'_x|} \times \overline{|v'_y|}, \quad (39.8)$$

onde $0 < c < 1$. De acordo com as equações (39.6) e (39.7) podemos escrever a equação (39.8) do seguinte modo

$$\overline{v'_x v'_y} = -\text{const.} \cdot \ell^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2, \quad (39.9)$$

onde a constante agora inclui o fator C da equação (39.8). Incluindo a constante ao valor ainda indeterminado do comprimento de mistura ℓ , temos,

$$\overline{v'_x v'_y} = -\ell^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2. \quad (39.10)$$

Consequentemente, a tensão de Reynolds pode ser expressa por

$$(\bar{\tau}_{yx})_t = \rho \ell^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2. \quad (39.11)$$

O sinal da tensão deve acompanhar o do gradiente de velocidade (na Fig. 39.1, ambos são positivos). Portanto, para levar em conta o sinal da derivada, devemos escrever a equação (39.11) do seguinte modo:

$$(\bar{\tau}_{yx})_t = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \quad (39.12)$$

que é a expressão final da hipótese de Prandtl.

Comparando esta última expressão com a equação da viscosidade turbilhonar de Boussinesq, resulta

$$\varepsilon = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|, \quad (39.13)$$

i.e., substituímos um coeficiente desconhecido ε por outro l ; entretanto, este último é independente do valor da velocidade, pois sabemos empiricamente que a tensão turbulenta é aproximadamente proporcional ao quadrado da velocidade e, na equação (39.12), vemos que l de fato não deve variar apreciavelmente com v . Entretanto, l tal como ε não é propriedade do fluido, mas não depende somente da posição no fluido, torna-se mais simples estabelecer as posições sobre o seu valor. Por exemplo, junto às paredes lisas o valor de l deve se tornar nulo, porque nesta região as flutuações transversais são amortecidas pela parede, também no escoamento junto às paredes rugosas o comprimento de mistura aproxima-se do valor do comprimento das protuberâncias da parede.

A expressão (39.12) indica que no centro de condutos onde a velocidade é máxima a tensão turbulenta é nula. Este resultado é incorreto pois as determinações experimentais mostram que no centro de condutos tanto as flutuações longitudinais quanto as transversais são dificilmente zero.

Expressões do comprimento de mistura

Para que o escoamento turbulento possa ser configurado pelas equações (38.25) a (38.27), devemos substituir as tensões turbulentas em função do gradiente de velocidade média temporal através de relações do tipo da equação (39.12). Entretanto, é preciso exprimir o comprimento de mistura l em função da posição no fluido.

Hipótese simples de Prandtl

Quando o fluido escoar em contato com uma parede sólida admite-se que o comprimento de mistura l depende da distância y contada a partir da parede. Basta esta distância para marcar um ponto no escoamento turbulento plano que admitimos para caracterizar fisicamente o comprimento de mistura. A relação mais simples entre l e y é de direta proporcionalidade, i.e.,

$$\ell = k y, \quad (39.14)$$

onde admite-se que k é uma constante empírica universal. Substituindo esta expressão na equação (39.12) temos

$$(\bar{\tau}_{yx})_t = \rho k^2 y^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \quad (39.15)$$

Portanto, a viscosidade de Boussinesq tem a seguinte expressão

$$\varepsilon = \rho k^2 y^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|. \quad (39.16)$$

Expressão de von Kármán

Admite-se que o comprimento de mistura depende exclusivamente do gradiente de velocidade média temporal na imediata vizinhança do ponto considerado. Sejam x_0 e y_0 as coordenadas deste ponto, no escoamento plano, onde a velocidade é $\bar{v}_{x,0}$. Em torno deste ponto a variação da velocidade pode ser expressa por uma expressão em série de Taylor:

$$\bar{v}_x = \bar{v}_{x,0} + \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)_0 (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{v}_x}{dy^2}\right)_0 (y - y_0)^2 + \dots, \quad (39.17)$$

onde y e y_0 representam as ordenadas dos pontos ao longo de uma vertical contada a partir da parede em contato com o escoamento turbulento. Nesses pontos as velocidades são, respectivamente, \bar{v}_x e $\bar{v}_{x,0}$.

A relação dimensionalmente correta mais simples, entre l e o perfil da velocidade em torno de um ponto do fluido é do tipo

$$l = k \frac{d\bar{v}_x/dy}{d^2\bar{v}_x/dy^2}, \quad (39.18)$$

onde admite-se que a constante k é a mesma da equação (39.14). Substituindo esta expressão na equação (39.12), resulta

$$(\bar{\tau}_{yx})_t = \rho k^2 \frac{(d\bar{v}_x/dy)^4}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2}. \quad (39.19)$$

Portanto, comparando esta expressão com a equação (39.1), vemos que a viscosidade turbilhonar pode ser expressa por

$$\varepsilon = \rho k^2 \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2}. \quad (39.20)$$

Valor de k

O valor numérico da constante universal k só pode ser medido experimentalmente. As experiências de Nikuradse com o escoamento turbulento em tubos lisos e rugosos confirmaram (Fig. 39.2) que de fato k pode ser considerado constante e aproximadamente igual a 0,4 nas proximidades da parede do tubo. Na figura, y é a distância contada da parede, x é o comprimento de mistura e R é o raio do duto.

Distribuição das tensões laminar e turbulenta

A tensão de cisalhamento total é a soma das tensões laminar e turbulenta. Conhecido o perfil de velocidade é possível determinar a contribuição de cada uma das tensões para o total. Tomamos como exemplo o caso do escoamento turbulento, quasi-permanente,

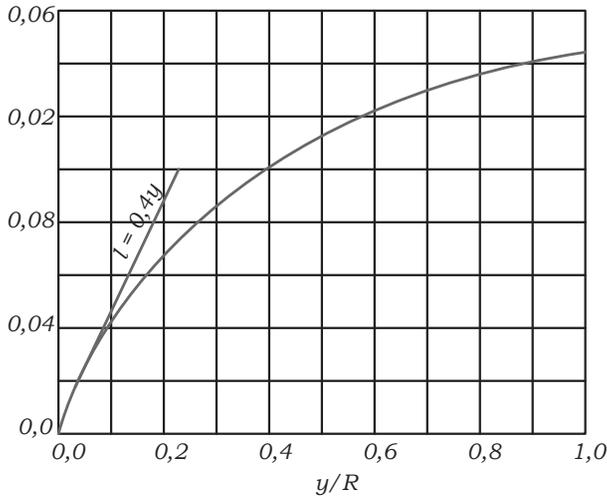


Figura 39.2

incompressível, homogêneo e plano, i.e., suficientemente longe da entrada em tubulação reta. A tensão total varia linearmente ao longo do raio segundo a equação (33.7), que é válida tanto para o escoamento laminar quanto para o turbulento:

$$\tau_{rx} = \tau_0(r/R) = \tau_0[1 - (y/R)], \quad (33.7)$$

onde τ_0 é a tensão de cisalhamento na parede ($r = R$) e y é a distância radial contada a partir da parede. Das equações (33.7) em diante deixaremos de usar a barra para representar grandezas médias temporais sempre que não houver confusão com grandezas instantâneas.

A tensão τ_0 pode ser calculada pela equação (33.6)

$$\tau_0 = \Delta(P + \rho gh)R/2L, \quad (33.6)$$

através da medida simples da queda de pressão. A tensão de cisalhamento laminar pode ser determinada por

$$(\tau_{ri})_\ell = -\mu \frac{dv_x}{dr} = \mu \frac{dv_x}{dy}, \quad (39.21)$$

uma vez conhecido o perfil da velocidade, que pode ser medido por um tubo de Pitot. Daí, da tensão total subtraímos os valores de $(\tau_{rx})_\ell$ para determinar a contribuição da tensão turbulenta $(\tau_{rx})_t$.

A Figura 39.3 ilustra a distribuição das tensões no raio do tubo reto. Vemos que na maior parte do tubo predomina o fluxo turbulento de quantidade de movimento; somente junto à parede é que o fluxo molecular é importante. Quanto mais turbulento for o escoamento menor a contribuição da tensão de cisalhamento.

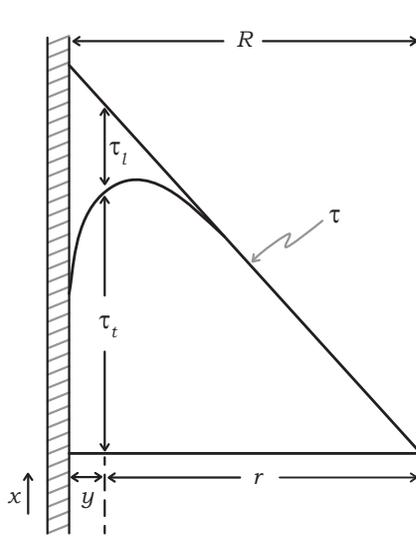


Figura 39.3

Expressões da tensão de cisalhamento total

A tensão total, soma da laminar com a turbulenta, pode ser expressa por

$$\tau = \tau_\ell + \tau_t = (\mu + \varepsilon) \frac{dv_x}{dy}, \quad (39.22)$$

onde ε segundo Prandtl é dado pela equação (39.16) e segundo von Kármán pela equação (39.20), i.e.,

$$\tau = \left[\mu + \rho k^2 y^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \right] \frac{dv_x}{dy}, \quad (39.23)$$

$$\tau = \left[\mu + \rho k^2 \frac{(dv_x/dy)^3}{(d^2v_x/dy^2)^2} \right] \frac{dv_x}{dy}. \quad (39.24)$$

A Figura 39.2 mostra que junto à parede predomina o primeiro termo do segundo membro dessas equações ao passo que em quase toda a seção do tubo é o segundo termo, a tensão turbulenta, que comanda a transferência de quantidade de movimento.

Referências

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 19, 1960.

BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dossat, Capítulo 20, 1960.

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1960.

Distribuição logarítmica da velocidade

O cálculo do perfil de velocidade no escoamento turbulento, plano em um conduto qualquer ou axissimétrico em tubos retos, pode ser feito por intermédio de expressões que resultam das equações da tensão turbulenta, (39.15) de Prandtl e (39.19) de von Kármán.

Distribuição de von Kármán

Admitimos que a tensão turbulenta é praticamente igual à tensão total em quase toda a seção do conduto, o que é principalmente aproximado para altos valores do número de Reynolds. Podemos eliminar a tensão local combinando as equações (33.7) da distribuição linear da tensão total e (39.19) da tensão turbulenta segundo von Kármán, o que resulta em

$$\frac{\tau_0}{\rho} \left(1 - \frac{y}{R}\right) = k^2 \frac{(dv_x/dy)^4}{(d^2v_x/dy^2)^2}. \quad (40.1)$$

Dividindo ambos os membros por k^2 e tirando a raiz quadrada, temos,

$$\frac{(dv_x/dy)^2}{d^2v_x/dy^2} = \sqrt{\tau_0/\rho} \frac{1}{k} \sqrt{1 - (y/R)}. \quad (40.2)$$

Definimos uma nova grandeza por

$$v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}, \quad (40.3)$$

que é chamada de velocidade de cisalhamento ou velocidade de atrito porque tem as dimensões de uma velocidade e é função da tensão de atrito com a parede do conduto. A velocidade v_* é constante para um dado escoamento. A equação (40.2) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^{-2} \frac{d(dv_x/dy)}{dy} = \frac{k}{v_*} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R-y}}. \quad (40.4)$$

Esta expressão pode ser integrada para fornecer o seguinte resultado:

$$-\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^{-1} = -\frac{2k}{v_*} \sqrt{R} \sqrt{R-y} + C_1. \quad (40.5)$$

O valor de C_1 pode ser determinado a partir da condição de contorno junto à parede

$$y = 0, \quad (dv_x/dy)^{-1} \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$C_1 = \frac{2k}{v_*} R, \quad (40.6)$$

e a equação (40.5) pode ser escrita

$$-\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^{-1} = \frac{v_*}{2kR} \left[\frac{1}{1 - \sqrt{1 - (y/R)}} \right], \quad (40.7)$$

que fornece o gradiente de velocidade do perfil de von Kármán do escoamento turbulento. A equação (40.7) pode ser integrada trocando-se antes as variáveis do seguinte modo:

$$\sqrt{1 - (y/R)} = z, \quad \text{e portanto,} \quad dy = -2Rzdz.$$

Então, substituindo este resultado na equação (40.7), podemos alegar

$$dv_x = \frac{v_*}{2kR} \frac{1}{1 - z} (-2Rzdz), \quad (40.8)$$

que integrada fornece

$$v_x = \frac{v_*}{R} [z + \ln(1 - z)] + C_2, \quad (40.9)$$

ou, voltando a $\sqrt{1 - (y/R)} = z$

$$v_x = \frac{v_*}{k} \{ \sqrt{1 - (y/r)} + \ln[1 - \sqrt{1 - (y/R)}] \} + C_2. \quad (40.10)$$

O valor de C_2 pode ser determinado pela condição no centro do conduto

$$y = R, \quad v_x = v_{x,\max}.$$

Portanto,

$$C_2 = v_{x,\max}, \quad (40.11)$$

e a distribuição da velocidade de von Kármán é expressa por

$$v_x = v_{x,\max} + \frac{v_*}{k} \{ \sqrt{1 - (y/R)} + \ln[1 - \sqrt{1 - (y/R)}] \}. \quad (40.12)$$

Podemos abandonar o índice x e representar o componente de v na direção principal do escoamento plano axissimétrico simplesmente por v , pois não pode haver confusão desse componente com os outros componentes direcionais. Portanto, a equação (40.12) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{v_{\max} - v}{v_*} = -\frac{1}{k} \left[\ln[1 - \sqrt{1 - (y/k)}] + \sqrt{1 - (y/R)} \right]. \quad (40.13)$$

A Figura 40.1 mostra que a equação (40.13) representa bem os dados experimentais obtidos por Nikuradse em casos lisos e rugosos, apesar da hipótese de von Kármán incluir as seguintes inconsistências físicas:

- (1) A equação (39.18) que relaciona o comprimento de mistura com a posição através do valor do gradiente da velocidade nessa posição fornece um resultado fisicamente impossível, qual seja o de que no centro o comprimento de mistura é nulo.
- (2) Junto à parede a equação (40.12) diz que a velocidade é infinita, o que não é evidentemente verdadeiro. Este resultado errado pode ser explicado pelo fato de termos, igualando a tensão total à turbulenta por toda a seção do contato enquanto sabemos que é justamente junto à parede que a tensão viscosa é mais atuante.

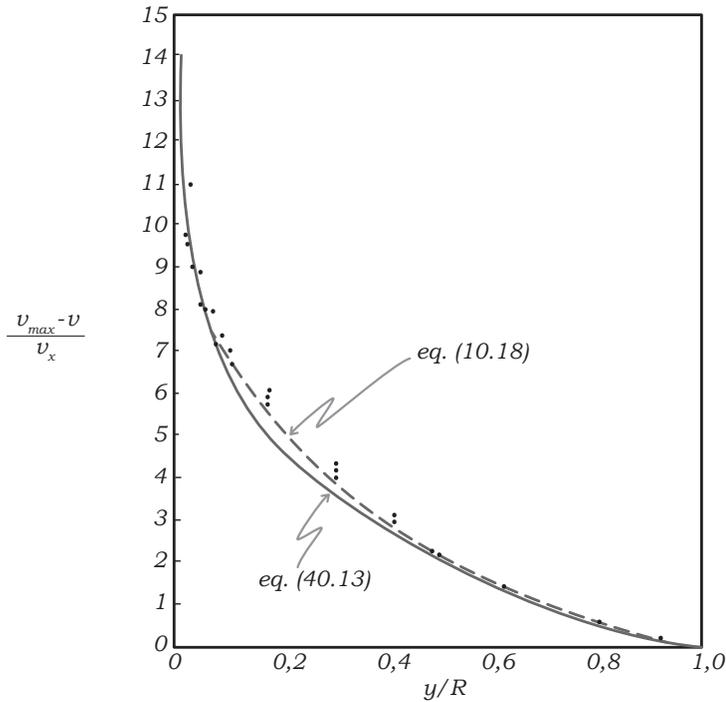


Figura 40.1

Distribuição de Prandtl

O perfil da velocidade, segundo Prandtl, é calculado por uma expressão que resulta da integração da equação (39.15). Para efetuar a integração, Prandtl admitiu que a tensão turbulenta, além de ser igual à tensão total, é também constante e igual à tensão τ_0 na parede. Deste modo, da equação (39.15) tiramos o valor do gradiente dv/dy

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_*}{ky'}, \quad (40.14)$$

onde $v_* = \sqrt{\tau_0/\gamma}$ é constante para um certo escoamento turbulento.

Separando as variáveis e integrando resulta

$$v = \frac{v_*}{k} \ln y + C. \quad (40.15)$$

A condição de contorno no centro do conduto

$$y = R, \quad v = v_{\max}$$

determina o valor de C ,

$$C = v_{\max} - \frac{v_{\max}}{k} \ln R. \quad (40.16)$$

Considerando o valor de $k = 0,4$ e substituindo este valor de C na equação (40.15), temos

$$v = v_{\max} + 2,5v_* \ln \frac{y}{R}, \quad (40.17)$$

ou, sob forma adimensional

$$\frac{v_{\max} - v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{R}{y}. \quad (40.18)$$

A Figura 40.1 mostra que esta expressão representa bem os dados experimentais, apesar das hipóteses utilizadas para a sua dedução. Essas suposições são:

- (1) A relação $(1 - ky)$ de acordo com a Figura 39.2 representa bem os dados experimentais nas proximidades da parede, entretanto, a constante de integração da equação (40.15) foi determinada por uma condição limite no centro do conduto.
- (2) Prandtl admitiu tensão constante em toda a seção do conduto, ao passo que na realidade a tensão varia linearmente segundo a equação (33.7),

$$\tau = \tau_0[1 - (y/R)].$$

A distribuição da velocidade de Prandtl é mais simples que a de von Kármán e apesar de sua base teórica pouco precisa representa satisfatoriamente os dados experimentais obtidos principalmente por Nikuradse tanto em tubos lisos quanto em tubos rugosos, desde que a distribuição seja aplicada à zona turbulenta do escoamento. Notadamente para altos valores do número de Reynolds, a zona turbulenta ocupa quase toda a seção do conduto.

Distribuição exponencial da velocidade

Blasius correlacionou os dados experimentais do escoamento turbulento em tubos lisos e para números de Reynolds até 10^5 propôs a seguinte expressão empírica do fator de atrito:

$$f = 0,3164 / \text{Re}^{1/4}. \quad (40.19)$$

A partir desta expressão Prandtl deduziu uma distribuição exponencial da velocidade, que tal como a equação de Blasius, é válida para o escoamento turbulento em dutos lisos quando $Re < 10^5$.

De acordo com a equação (33.21) que define o fator de atrito em função da tensão na parede τ_0 , temos

$$f = \frac{0,3614}{(Du\rho/\mu)^{1/4}} = \frac{8\tau_0}{\rho u^2}. \quad (40.20)$$

Tirando o valor da tensão,

$$\tau_0 = 0,03955\rho u^{7/4}(\mu/\rho)^{1/4}D^{-1/4}, \quad (40.21)$$

ou como $D = 2R$ e $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$

$$\tau_0 = 0,03325\rho u^{7/4}(\mu/\rho)^{1/4}R^{-1/4} = \rho v_*^2. \quad (40.22)$$

Desdobrando v_* em $v_*^{7/4}$ e $v_*^{1/4}$ podemos escrever a equação (40.22) do seguinte modo:

$$\frac{u}{v_*} = 6,99 \left(\frac{v_* R \rho}{\mu} \right)^{1/7}. \quad (40.23)$$

Os dados experimentais mostram que nos limites de $4.000 < Re < 100.000$ a relação entre a velocidade média u e a velocidade máxima v_{\max} no centro do tubo é bem representada por

$$\frac{u}{v_{\max}} = 0,8, \quad (40.24)$$

portanto, a equação (40.23) pode ser expressa por

$$\frac{v_{\max}}{v_*} = 8,74 \left(\frac{v_* R \rho}{\mu} \right)^{1/7}. \quad (40.25)$$

Por analogia, esta equação pode ser estendida à velocidade local v em qualquer distância y da parede:

$$\frac{v}{v_*} = 8,74 \left(\frac{v_* R \rho}{\mu} \right)^{1/7}. \quad (40.26)$$

Dividindo esta equação pela equação (40.25), obtemos a distribuição exponencial da velocidade

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/7}, \quad (40.27)$$

que representa bem os dados experimentais do perfil da velocidade na zona turbulenta da seção do duto quando $Re < 10^5$ e o duto é liso.

A expressão mais geral do perfil exponencial é dado por:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}, \quad (40.28)$$

onde o expoente $1/n$ varia com o número de Reynolds segundo os dados da Tabela 40.1. O aumento do número de Reynolds diminui o valor do expoente $1/n$ que, aproxima-se assintoticamente de um valor constante. Para os valores mais altos de Reynolds a função logarítmica representa matematicamente a expressão assintótica e as expressões de von Kármán (eq. 40.12), e Prandtl (eq. 40.17) são desse tipo.

Re	$4 \cdot 10^8$	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$
l/n	1/6,0	1/6,6	1/7,0	1/8,8	1/10,0	1/10,0
u/v_{\max}	0,791	0,807	0,817	0,860	0,866	0,866

Tabela 40.1

A convergência assintótica da distribuição exponencial da velocidade pode ser interpretada fisicamente pelo fato de que a tensão total do escoamento é devido tanto à tensão laminar quanto à turbulenta, e a contribuição de cada uma dessas parcelas depende do valor do número de Reynolds. Quanto maior esse valor maior a contribuição da tensão turbulenta e mais achatado os valores muito altos de Re e tensão viscosa torna-se desprezível.

Referências

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 7, 1961.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulos 19 e 20, 1960.

Perfil universal da velocidade em tubulação reta lisa

A relação $v-y$ no escoamento turbulento em dutos retos de parede lisa pode ser expressa em função dos seguintes grupos adimensionais:

$$v^+ = v/v_* = v/\sqrt{\tau_0/\rho}, \quad (41.1)$$

$$y^+ = y \frac{v_*}{\nu} = y\sqrt{\tau_0/\rho}/\nu. \quad (41.2)$$

A expressão de y^+ tem a mesma forma que o número de Reynolds. Levando em conta que o fator de atrito f é definido pela equação (33.21)

$$f = 4\tau_0/(\rho u^2/2), \quad (33.21)$$

podemos exprimir os grupos v^+ e y^+ do seguinte modo

$$v^+ = \frac{v}{u\sqrt{f/8}}, \quad (41.3)$$

$$y^+ = yu\sqrt{f/8}/\nu. \quad (41.4)$$

A Figura 41.1 mostra que a representação $v^+ - y^+$ pode ser considerada como um perfil universal, pois representa todos os dados experimentais dos diversos perfis $v - y$ correspondentes aos diversos números de Reynolds Re_D turbulentos em tubos de parede lisa. No perfil universal podemos distinguir as três regiões da camada-limite: i.e., a subcamada laminar, a zona tampão e a zona turbulenta.

Com respeito à Figura 41.1, temos:

1. eq. (41.6),
2. eq. (41.9),
3. eq. (41.14),
4. eq. (41.15), $Re > 70, y^+ > 70$.

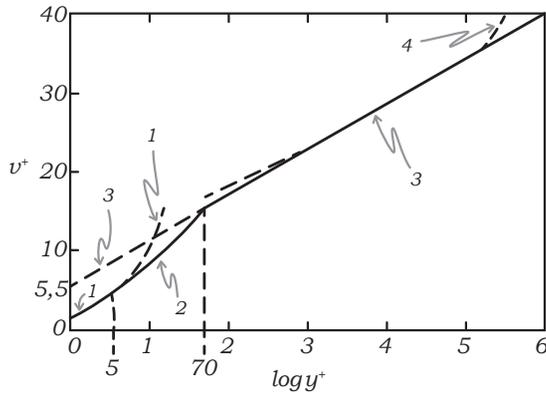


Figura 41.1

Subcamada laminar

Na subcamada laminar podemos admitir que o gradiente da velocidade dado pela equação (2.1) é constante, portanto,

$$\tau_0 = \frac{\mu v}{y}. \quad (41.5)$$

De acordo com as definições de v^+ e y^+ , esta equação pode ser expressa por

$$v^+ = y^+. \quad (41.6)$$

A subcamada laminar se estende de $y = 0$ até um valor de y correspondente a $y^+ = 5$. Podemos então chegar ao valor da espessura da subcamada laminar quando $y^+ = 5$, i.e.,

$$\delta_b = 5 \frac{v}{v_*} = 5 \frac{v}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}, \quad (41.7)$$

ou, de acordo com a equação (41.4),

$$\frac{\delta_b}{D} = \frac{5\sqrt{8}}{\text{Re}_D \sqrt{f}}. \quad (41.8)$$

Zona tampão

A zona tampão entre a subcamada laminar e a zona turbulenta pode ser considerada como situada entre os valores de y correspondentes a $5 < y^+ < 70$. Para essa zona von Kármán propôs a seguinte equação empírica

$$v^+ = -3 + 5 \ln y^+. \quad (41.9)$$

Esta expressão representa uma reta na Figura 41.1.

Zona turbulenta

De acordo com os dados experimentais, a zona turbulenta pode ser considerada como estendendo-se além de $y^+ = 70$. A distribuição da velocidade de Prandtl expressa pela equação (40.15) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{k} \ln y^+ + \frac{C}{v_*} + \frac{1}{k} \ln \frac{v_*}{v} - \frac{1}{k} \ln \frac{v_*}{v}, \quad (41.10)$$

ou seja,

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{yv_*}{v} + \frac{C}{v_*} - \frac{1}{k} \ln \frac{v_*}{v}. \quad (41.11)$$

De acordo com as definições de v^+ e y^+ , temos,

$$v^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C_1, \quad (41.12)$$

onde a nova constante C_1 é dada por

$$C_1 = \frac{C}{v_*} - \frac{1}{k} \ln \frac{v_*}{v}. \quad (41.13)$$

Os dados experimentais $v-y$ dos escoamentos turbulentos em dutos retos de parede lisa representados como na Figura 41.1 permitem determinar os valores de k e C_1 ; que resultam em

$$v^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5. \quad (41.14)$$

A zona turbulenta ocupa quase toda a seção do duto de modo que a equação (41.14) é comumente chamada de *distribuição universal da velocidade*.

Com base na distribuição exponencial da velocidade válida para $Re > 10^5$ podemos usar as definições de v^+ e y^+ na equação (40.26) para exprimi-la do seguinte modo:

$$v^+ = 8,74(y^+)^{1/7}. \quad (41.15)$$

A curva representativa dessa expressão está representada na Figura 41.1.

Perfil universal da velocidade em duto reto rugoso

A rugosidade da parede da tubulação acarreta maior resistência ao escoamento e modifica o perfil de velocidade em comparação com o escoamento em tubo liso. O efeito da rugosidade depende de diversos fatores que são de difícil caracterização quantitativa em tubos comerciais, i.e., depende da forma, tamanho, concentração e distribuição das protuberâncias existentes no interior dos dutos. A definição da rugosidade de tubulações comerciais é usualmente feita por comparação com o efeito produzido pela rugosidade artificial que Nikuradse empregou revestindo as paredes de tubos com grãos de areia aproximadamente uniformes e cuidadosamente tamisados.

Número de Reynolds rugoso

O efeito de rugosidade no perfil da velocidade pode ser estudado através de um parâmetro que representa a relação entre o tamanho do grão de areia, k_a , e a espessura da subcamada laminar δ_b . Calculando δ_b pela equação (41.7), temos,

$$\frac{\varepsilon_a}{\delta_b} = \frac{1}{5} \frac{\varepsilon_a v_*}{\nu}. \quad (41.16)$$

O grupo adimensional $k_a v_* / \nu$ é chamado de número de Reynolds rugoso, i.e.,

$$\text{Re}_r = \varepsilon_a v_* / \nu = 5(\varepsilon_a / \delta_b). \quad (41.17)$$

Quando o tamanho dos grãos de areia é igual ao da espessura da subcamada laminar, $\text{Re}_r = 5$. O tubo é chamado de *hidraulicamente liso* quando o valor de Re_r é menor do que cinco, i.e., quando o tamanho das protuberâncias é menor do que a espessura da subcamada laminar.

Combinando as equações (41.1) e (41.3) chegamos a seguinte expressão de v_* :

$$v_* = u \sqrt{\frac{f}{8}}. \quad (41.18)$$

Portanto, o número de Reynolds rugoso pode ser dado por

$$\text{Re}_r = \frac{Du}{\nu} \frac{\varepsilon_a}{D} \sqrt{\frac{f}{8}}, \quad (41.19)$$

que representa o produto de três grupos adimensionais: o número de Reynolds Re_D , o fator de atrito f e a relação ε_a/D entre o tamanho das protuberâncias e o diâmetro do tubo, relação essa chamada de *rugosidade relativa*.

Perfil de velocidade

O perfil universal de Prandtl, equação (40.17), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} - 2,5 \ln \frac{R}{C\varepsilon_a}. \quad (41.20)$$

No caso de condutos rugosos admite-se que a zona turbulenta penetra em direção à parede até uma distância y_t . Supõe-se que essa distância y_t é diretamente proporcional ao tamanho ε_a das projeções, i.e., $y_t = C\varepsilon_a$. Segue-se que quando $y = y_t = C\varepsilon_a$, $v = v_t$. Portanto, de acordo com a equação (41.20)

$$\frac{v^+}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} - 2,5 \ln \frac{R}{C\varepsilon_a}. \quad (41.21)$$

Combinando esta expressão com a equação (41.20), temos,

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_t}{v_*} + 2,5 \ln \frac{R}{C\varepsilon_a} - 2,5 \ln \frac{R}{y}. \quad (41.22)$$

Simplificando essa expressão chegamos a

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_t}{v_*} - 2,5 \ln C + 2,5 \ln \frac{u}{\varepsilon_a}. \quad (41.23)$$

Nessa equação, definimos um parâmetro B por

$$B = \frac{v_t}{v_*} - 2,5 \ln C, \quad (41.24)$$

portanto, a equação (41.23) pode ser expressa por

$$v^+ = B + 2,5 \ln \frac{y}{\varepsilon_a}. \quad (41.25)$$

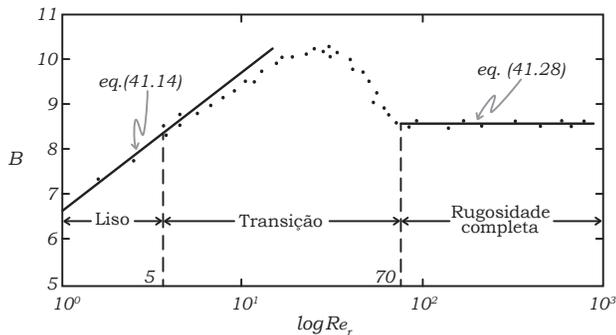


Figura 41.2

O parâmetro B para um dado escoamento é função do tipo de rugosidade da parede e o seu valor deve ser determinado experimentalmente. A Figura 41.2 representa B em função de $\log Re_r$, de acordo com os dados experimentais de Nikuradse para o escoamento turbulento em dutos lisos e artificialmente rugosos. Os dados podem ser agrupados em três regiões distintas:

- (1) *Hidraulicamente liso*: $Re_r < 5$. Nessa região B é expresso em função de Re_r pela equação

$$B = 5,50 + 2,5 \ln Re_r, \quad (41.26)$$

que representa bem os dados experimentais e pode ser obtida igualando-se o valor de v^+ da equação (41.25) ao da equação (41.14) que exprime a distribuição universal da velocidade na zona turbulenta do escoamento em tubos lisos.

- (2) *Completamente rugoso*: $Re_r > 70$. Nessa região $B = 8,50$ representa os dados experimentais obtidos por Nikuradse; portanto, o perfil universal da velocidade em tubos completamente rugosos é expresso por

$$v^+ = 8,50 + 2,5 \ln \frac{y}{\varepsilon_a}. \quad (41.27)$$

Essa equação pode ser expressa de modo a incluir os grupos v^+ e y^+ do perfil universal, i.e.,

$$v^+ = 2,5 \ln y^+ + 8,50 - 2,5 \ln Re_r, \quad (41.28)$$

- (3) *Transição*: $5 < Re_r < 70$. Nessa região os pontos experimentais formam uma curva que converge para as duas retas das regiões lisa e rugosa.

A Figura 41.3 representa os perfis universais para tubulações lisas e rugosas; é um gráfico que aloca v^+ com $\log y^+$ e tem Re_r como parâmetro. Vemos que a subcamada laminar que se estende até $y^+ = y^*/\nu = 5$ em tubos hidraulicamente lisos, não afeta os perfis universais em tubos completamente rugosos.

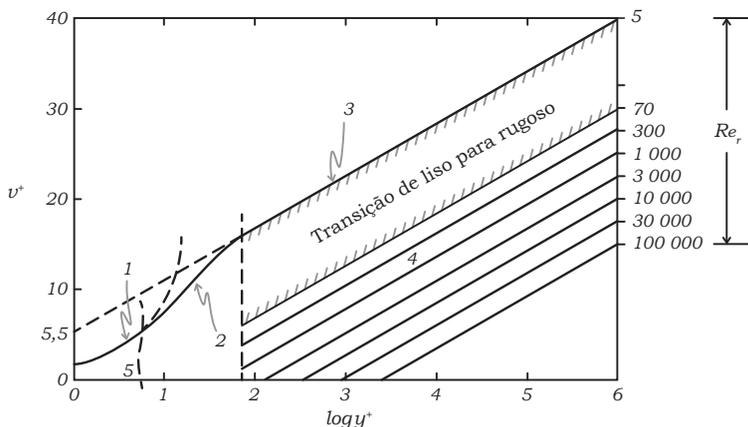


Figura 41.3

Com respeito à Figura 41.3, temos:

1. eq. (41.6),
2. eq. (41.9),
3. eq. (41.14),
4. eq. (41.28), $Re > 70$, $y^+ > 70$.

A Figura 41.4 esquematiza a relação entre a rugosidade da parede e a subcamada laminar. O caso (a) ocorre quando, para um dado tamanho de protuberância, a velocidade de escoamento é relativamente baixa ou, quando para uma dada velocidade, as protuberâncias são relativamente pequenas, a subcamada laminar cobre a rugosidade e o duto comporta-se como duto liso em relação ao escoamento. No caso (b), ao contrário, a rugosidade emerge da subcamada laminar e penetra na zona turbulenta e aí produz um acréscimo de turbulência por choques dos turbilhões com as protuberâncias. Nesse

último caso a subcamada laminar não afeta o perfil da velocidade e o duto é considerado como completamente rugoso em relação ao escoamento.

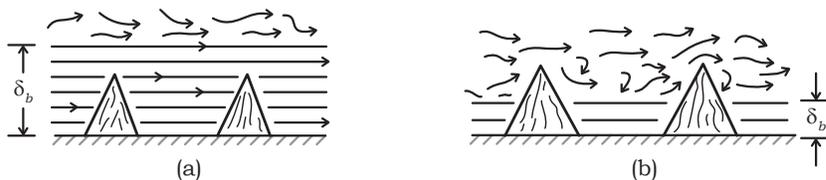


Figura 41.4

Referências

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 20, 1960.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 7, 1961.

ADDISON, H. *A Treatise on Applied Hydraulics*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1957.

Distribuição da velocidade em tubos lisos ou rugosos

As equações (41.9) e (41.27) representam, respectivamente, os perfis da velocidade em tubos lisos e rugosos. Podemos, entretanto, obter uma única equação a partir dessas duas, válida, portanto, tanto para tubos lisos quanto para dutos rugosos, desde que as exprimamos em função da velocidade média u . Por definição u é expressa por:

$$u = \frac{Q}{S} = \frac{\int_{\delta_b-0}^R v(2\pi r) dr}{\pi R^2}. \quad (42.1)$$

Como $r = R - y$ e $dr = -dy$, temos

$$u = \frac{\int_R^{\delta_b-0} v 2\pi(R-y) dy}{\pi R^2}. \quad (42.2)$$

Para o escoamento turbulento em dutos lisos a equação (41.9) dá o valor de v :

$$v = v_* \left(5,50 + 2,5 \ln \frac{v_* y}{\nu} \right). \quad (42.3)$$

Substituindo esta expressão na equação (42.2), temos,

$$u = \frac{\int_R^{\delta_b-0} 2\pi v_* [5,50 + 2,5 \ln(v_* y/\nu)] (R-y) dy}{\pi R^2}. \quad (42.4)$$

O resultado da integração é:

$$\frac{u}{v_*} = 1,75 + 2,5 \ln \frac{v_* R}{\nu}. \quad (42.5)$$

Analogamente, substituindo na equação (42.2) o valor de v expresso pela equação (41.27) da distribuição da velocidade em dutos rugosos, obtemos,

$$\frac{u}{v_*} = 4,75 + 2,5 \ln \frac{R}{\epsilon_a}. \quad (42.6)$$

A subtração da equação (42.5) da equação (41.9) para tubos lisos ou a subtração da equação (42.6) da equação (41.27) para tubos rugosos fornece o mesmo resultado, i.e.,

$$\frac{\nu}{v_*} = \frac{u}{v_*} + 3,75 + 2,75 \ln \frac{\nu}{R}. \quad (42.7)$$

Segue-se que a distribuição da velocidade na zona turbulenta do escoamento é idêntica, quer o tubo seja liso quer seja rugoso, porque o mecanismo da turbulência na região

mais afastada da parede independe das condições da sua rugosidade. A equação (42.7) serve, portanto, para o traçado do perfil da velocidade do escoamento em dutos rugosos e é mais prática do que a equação (41.27), porque não exige o conhecimento do valor de ε_a .

A equação (42.7) pode ser modificada substituindo-se v_* por $u\sqrt{f}/8$ de acordo com a equação (41.18), i.e., usando logaritmo de base 10.

$$\frac{v}{u} = 1 + \sqrt{f} \left(1,32 + 2 \log \frac{y}{R} \right). \quad (42.8)$$

Esta equação representa melhor os dados experimentais de Nikuradse quando as constantes 1,32 e 2 são substituídas respectivamente por 1,45 e 2,15, i.e.,

$$\frac{v}{u} = 1 + \sqrt{f} \left(1,42 + 2,15 \log \frac{y}{R} \right). \quad (42.9)$$

Levando em conta que para $y = R$, $v = v_{\max}$, temos

$$\frac{u}{v_{\max}} = \frac{1}{1 + 1,43\sqrt{f}}, \quad (42.10)$$

que fornece a relação entre a velocidade média e a velocidade máxima no escoamento turbulento em tubos lisos ou rugosos. Essa relação é chamada de *coeficiente do tubo* e, no caso do escoamento laminar, é igual a 0,5 como mostramos pela equação (33.14).

Expressões do fator de atrito em dutos lisos ou rugosos

No escoamento turbulento em dutos lisos a velocidade média pode ser expressa pela equação (42.5), i.e., usando o logaritmo de base 10:

$$\frac{u}{v_*} = 1,75 + 5,75 \log \frac{v_* R}{\nu}. \quad (42.11)$$

Eliminando v_* em função de f com o auxílio da equação (41.18) chegamos a

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,91 + 2,03 \log(\text{Re} \sqrt{f}). \quad (42.12)$$

Os dados experimentais de Nikuradse são, entretanto, melhor representados pela expressão

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,8 + 2,0 \log(\text{Re} \sqrt{f}), \quad (42.13)$$

que fornece a relação entre o fator de atrito e o número de Reynolds no caso do escoamento turbulento em duto reto liso.

No caso de tubos artificialmente rugosos, seguimos um procedimento análogo para eliminar v_* entre as equações (42.6) e (41.8) e para obter

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,68 + 2,03 \log \frac{R}{\varepsilon_a}. \quad (42.14)$$

Esta é a expressão do fator de atrito para o escoamento turbulento em tubos completamente rugosos ($Re_r > 70$); neste caso, f é independente do número de Reynolds.

Representação gráfica

A representação gráfica dos valores de f , Re e R/ϵ_a obtidos em tubos lisos e revestidos, por Nikuradse, é mostrada na Figura 42.1. Desse gráfico podemos tirar as seguintes conclusões:

- (1) No escoamento laminar o fator de atrito é, portanto, a perda de carga $h_a = f(L/D)(u^2/2g)$ e não depende da rugosidade da parede.
- (2) No escoamento turbulento, para um dado valor de R/ϵ_a existe uma faixa de valores de Re na qual o tubo revestido comporta-se como hidraulicamente liso; por exemplo, quando $R/\epsilon_a = 507$ o escoamento no duto artificialmente rugoso comporta-se como escoamento em duto liso, obedecendo a equação (42.13) até Re aproximadamente igual a 6×10^4 .
- (3) O número de Reynolds de transição entre o escoamento laminar e o turbulento, que é de aproximadamente 2.100 na Figura 42.1, é independente da rugosidade da parede. Esse número de Reynolds de transição é chamado de número de Reynolds crítico.

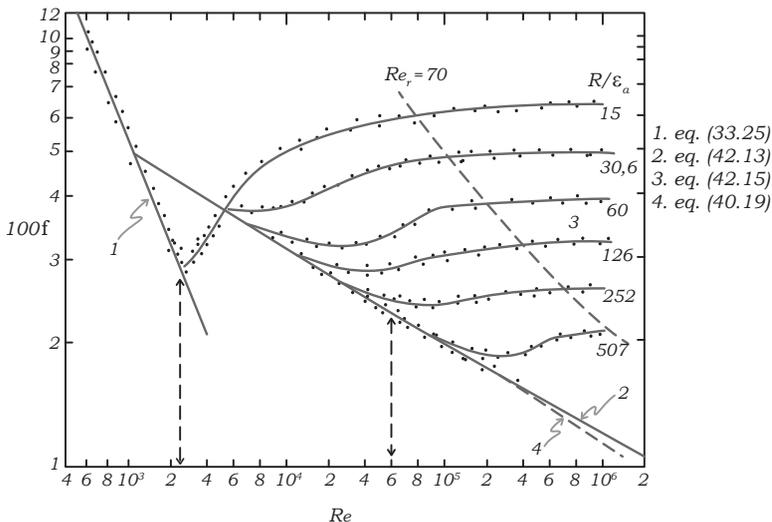


Figura 42.1

- (4) Os valores de Re_r podem ser lançados na Figura 42.1 através da equação (41.19) que relaciona o número de Reynolds rugoso com o fator de atrito, o número de

Reynolds Re e a rugosidade relativa $\varepsilon_a/10$. Vemos que para $Re_r > 70$ o fator de atrito independe do valor de Re sendo expresso pela equação (42.15).

- (5) Na região limitada pelas curvas de duto liso e de $Re_r = 70$, o fator de atrito depende tanto do número de Reynolds quanto da rugosidade do tubo.

Rugosidade equivalente de tubos comerciais

A rugosidade das paredes de tubos comerciais não pode ser especificada da mesma maneira que a rugosidade k_a dos tubos artificialmente revestidos de grãos de areia nas experiências de Nikuradse. Nessas experiências, k_a representa o tamanho de grãos uniformes usados no revestimento fechado das paredes do tubo. Nas tubulações comerciais as protuberâncias têm vários tamanhos, são multiformes e encontram-se irregularmente distribuídas na superfície interna do duto. Entretanto, por comparação com o efeito da rugosidade equivalente, a determinação experimental do valor da rugosidade equivalente de tubos comerciais pode seguir o seguinte procedimento:

- (1) Determinamos valores da perda de carga h_a e da velocidade média u em um tubo de certo tipo comercial. A partir dos valores de h_a e u calculamos o fator de atrito pela equação (33.23)

$$h_a = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g}, \quad (33.23)$$

- (2) Representamos os valores de f em função do número de Reynolds, $Re = Dv\rho/\mu$ como na Figura 24.1.
- (3) Na região do regime completamente rugoso ($Re_r > 70$), tiramos o valor de f e $R = D/2$ que substituímos na equação (42.14), o que nos permite calcular o valor da rugosidade equivalente ε , que é considerada representativa da classe de tubo comercial estudado.

Gráfico do fator de atrito de dutos comerciais

As curvas da Figura A.1 representam o fator de atrito f em função do número de Reynolds $Dv\rho/\mu$ e do parâmetro R/ε para tubos comerciais de diversos tipos. Os valores de ε são os equivalentes à rugosidade artificial de Nikuradse. As retas da região de tubulações rugosas ou turbulência completa foram traçadas com a equação (42.15), e a curva de tubos lisos com a equação (42.13), tal como na Figura 42.1. Para a região de transição entre tubo liso e tubo rugoso as curvas foram traçadas com base na equação empírica de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,74 - 2,0 \log \left(\frac{\varepsilon}{R} + \frac{18,7}{Re \sqrt{f}} \right). \quad (42.15)$$

Esta expressão é assintótica às equações de tubo liso e rugoso, i.e., para $\varepsilon \rightarrow 0$ as curvas da região de transição aproximam-se da curva de duto liso enquanto para os valores

relativamente elevados de Re (em relação aos valores de ε/R), a equação (42.15) tende para a equação (42.14) de tubulações rugosas.

Os valores de ε tabelados na Figura A.1 referem-se à rugosidade equivalente de tubos comerciais novos e limpos. Essa rugosidade tende a aumentar com o tempo de serviço.

Referências

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 20, 1960.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 7, 1961.

ADDISON, H. *A Treatise on Applied Hydraulics*, John Wiley & Sons, Capítulo 5, 1957.

Problemas de escoamento em tubos retos

Os problemas práticos de escoamento em tubulações podem, em geral, ser enquadrados em três tipos principais:

Tipo nº	Incógnita	Dados
1	h_a	$D, Q, \mu, \rho, \varepsilon$
2	Q	$D, h_a, \mu, \rho, \varepsilon$
3	D	$Q, h_a, \mu, \rho, \varepsilon$

Tabela 43.1

A solução de cada tipo é obtida através dos seguintes procedimentos:

- tipo nº 1: Calculamos Re e R/ε , determinamos f na Figura A.1 e calculamos h_a através da equação (33.23).
- tipo nº 2: Para calcular a vazão, dados o diâmetro e a perda de carga, por meio da Figura A.1, precisamos usar de um método de tentativas, pois a velocidade média u figura tanto no grupo f quanto no número de Reynolds. Podemos, entretanto, calcular diretamente a velocidade e daí a razão $Q = uS$, através do uso dos seguintes grupos adimensionais

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{u}{\sqrt{2g(D/L)h_a}}, \quad (43.1)$$

$$K'_a = Re \sqrt{f} = (D\rho/u) \sqrt{2g(D/L)h_a}, \quad (43.2)$$

tendo como parâmetro a rugosidade relativa ε/D . O produto $Re \sqrt{f}$ é chamado de número de Kármán, K_a .

Assim, para o escoamento laminar, a equação (33.25) pode ser expressa por

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{Re \sqrt{f}}{64}, \quad (43.3)$$

que é a equação de uma curva em coordenadas semilogarítmicas.

- tipo n° 3: O uso da Figura A.1 exige tentativas no problema de calcular o diâmetro de um tubo que deve transportar uma dada vazão de um certo fluido, satisfazendo a uma perda de carga especificada. O método das tentativas pode ser conduzido do seguinte modo: admitimos um valor de f (0,02 é um bom ponto de partida) e calculamos o diâmetro com a equação (33.23), $h_a = f(L/D)(u^2/2g)$. Com o valor de D calculamos Re e R/ϵ e daí, na Figura A.1, verificamos o valor de f . O diâmetro estará determinado quando o valor de f suposto for igual ao calculado.

Na prática, é usual a determinação do diâmetro do tubo com base nas chamadas “velocidades econômicas”, constantes da Tabela A.2. Essas velocidades levam em conta o efeito contraditório do diâmetro nos custos fixos ligados ao tamanho do tubo e nos custos de operação ligados à perda de carga. Enquanto os custos fixos aumentam com o aumento do diâmetro, i.e., com a diminuição da velocidade, os custos de operação diminuem com aquele aumento, pois a perda de carga diminui, diminuindo conseqüentemente o consumo de energia necessário para transportar uma certa vazão de fluido.

Uma vez escolhida a velocidade econômica, o diâmetro interno é dado por:

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi u}}. \quad (43.4)$$

Tubos

As Tabelas A.3 e A.4 fornecem dados sobre tubos comerciais de acordo com as normas norte-americanas. Os tubos são usualmente construídos de aço forjado ou galvanizado e os tubos de ligas metálicas, tais como o láteo, o bronze naval, o “cobre”, aço inoxidável etc.

As dimensões dos tubos tornam-se conhecidas uma vez dados o seu diâmetro nominal (diferente tanto do diâmetro interno quanto do diâmetro externo) e a espessura da parede através do “Schedule number”, cujo valor numérico é dado por

$$\text{“Schedule no.”} = 1000 \frac{P}{S}, \quad (43.5)$$

onde P representa a pressão de trabalho e S a tensão admissível do material do tubo. Os dutos comuns de aço com costura têm espessuras de parede correspondentes ao número de 40. Para pressões mais elevadas usa-se o número 80 ou mesmo o 120.

A espessura dos tubos de ligas metálicas é representada pelo B.W.G. (Birmingham Wire Gauge) e os seus diâmetros nominais são iguais aos diâmetros internos. Com os dados das tabelas A.3 e A.4 podemos calcular com facilidade as razões ou velocidades de escoamento nos tubos de diferentes diâmetros comerciais.

Processos expeditos para resolver problemas de escoamento turbulento em dutos retos

A maioria dos problemas de escoamento turbulento no transporte de fluidos em tubos retos situa-se na região do gráfico do fator de atrito, (Fig. A.1), compreendido entre a curva de tubos lisos e a linha interrompida que limita a região de dutos rugosos. Naquela região o fator de atrito depende tanto do número de Reynolds quanto da rugosidade da parede. Várias equações empíricas relacionando de uma maneira aproximada o fator de atrito com o número de Reynolds têm sido propostas para resolver de maneira expedita os problemas usuais de calcular a perda de carga, a vazão ou o diâmetro de tubos. Essas várias equações podem ser consideradas como representativas de várias retas traçadas na Figura A.1, mais ou menos no meio do intervalo entre a curva de duto liso e a linha limite do regime rugoso. Uma dessas equações é a de Generaux;

$$f = \frac{0,16}{\text{Re}^{0,16}}, \quad (43.6)$$

que em coordenadas logarítmicas representa uma reta de coeficiente angular $-0,16$ e ordenada na origem ($\text{Re} = 10$), 16 .

Substituindo esse valor de f na equação geral (33.23) onde $u = 4Q/\pi D^2$, resulta,

$$h_a = 0,126 \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{0,16} \frac{Q^{1,84}}{D^{4,84}} \frac{L}{g}. \quad (43.7)$$

Esta equação permite calcular diretamente, sem tentativas, tanto a perda de carga quanto a vazão volumétrica Q ou o diâmetro interno do tubo D . Entretanto, esses cálculos ainda são considerados como algo trabalhoso porque envolvem expoentes fracionários. Porém, expressões como a equação (43.7) podem ser usadas para a construção de ábacos ou tabelas que permitem a leitura direta da perda de carga, vazão ou diâmetro. Essas expressões incluem em geral um coeficiente empírico que leva em conta a rugosidade da parede e, nesse caso, os ábacos e tabelas referem-se somente a um certo tipo de conduto forçado. Livros de hidráulica, tais como os das referências (Trindade Neves, 1960; Garcez, 1960; Benrill, 1960 e Azevedo Neto, 1957), contêm inúmeros ábacos e tabelas desse tipo, baseados em fórmulas empíricas tradicionais de Bazin, Chézy, Weisbach, Dupuit, Darcy, Vallot, Manning, Flamant, Nazen-Williams, Prony, Lévy, Strickler, Gauckler, Kutter, Fair-Whipple-Hsiao, Scobey, etc.

A equação (43.7) é conveniente também para a determinação do efeito de alterações nas variáveis μ , ρ , Q , D e L na perda de carga por atrito. Assim, para duas condições diferentes 1 e 2,

$$\frac{h_{a,1}}{h_{a,2}} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{0,16} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{0,16} \left(\frac{Q_1}{Q_2} \right)^{4,84} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{4,84} \frac{L_1}{L_2}. \quad (43.8)$$

Esta expressão do escoamento turbulento pode ser comparada com expressão equivalente do escoamento laminar baseado na equação (33.17) de Poiseuille, i.e., para o escoamento laminar,

$$\frac{h_{a,1}}{h_{a,2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{Q_1}{Q_2} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 \frac{L_1}{L_2}. \quad (43.9)$$

Vemos que, enquanto no escoamento turbulento em conduto reto a perda de carga por atrito varia aproximadamente com o quadrado da vazão, a quinta potência do diâmetro e varia relativamente pouco com a viscosidade, no escoamento laminar a variação é com a primeira potência da razão, quarta do diâmetro e primeira da viscosidade.

Referências

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 7, 1961.

TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulica*, Editora Globo, 1960.

GARCEZ, L. N. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Edgard Blucher, 1960.

BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dosset, 1960.

AZEVEDO NETO, J. W. *Manual de Hidráulica*, Edgard Blucher, 1957.

Escoamento em condutos forçados, retos, de seção não circular

Consideremos um conduto horizontal de seção não circular representada na Figura 44.1 pela seção triangular de área S e perímetro ψ . Qualquer que seja o regime de escoamento, laminar ou turbulento, existe sempre um equilíbrio entre as forças externas $(P_1 - P_2)S$ que atuam no fluido e a força de cisalhamento na parede $\tau_0\psi L$. Portanto, tal como mostra a equação (33.19), para o caso do conduto de seção não circular qualquer

$$(P_1 - P_2)S = \tau_0\psi L. \tag{44.1}$$

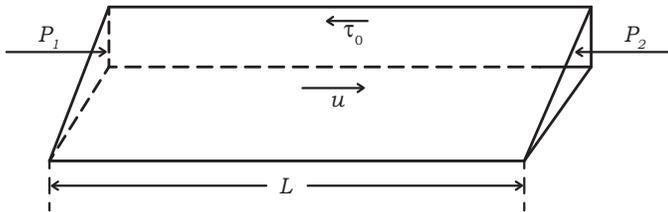


Figura 44.1

Isolando o valor da tensão na parede, temos,

$$\tau_0 = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{S}{\psi}. \tag{44.2}$$

Para o conduto de seção circular temos, de acordo com a equação (33.20),

$$\tau_0 = \frac{P_1 - P_2}{2L} R, \tag{33.20}$$

portanto, por analogia com o conduto de seção circular, definimos um *raio hidráulico* de conduto de seção não circular pela relação

$$R_h = \frac{S}{\psi}, \tag{44.3}$$

i.e., o raio hidráulico representa a razão entre a seção transversal ao escoamento e o perímetro “molhado” pelo fluido. Em condutos circulares, o raio hidráulico é dado por

$$R_h = \frac{S}{\psi} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}. \tag{44.4}$$

Definimos também, por conveniência, um diâmetro equivalente do conduto de seção não circular, D_{eg} , pela expressão

$$D_{eg} = 4R_h = 4(S/\psi). \quad (44.5)$$

Os condutos de seção retangular, triangular, trapezoidal, elíptica, oval ou, de qualquer forma irregular, não guardam semelhança geométrica com os condutos de seção circular. Entretanto, se o escoamento é turbulento e a seção não se afasta muito nas suas proporções da seção circular e não contém cantos muito agudos, podemos usar os métodos empregados para resolver os problemas de condutos não circulares.

Substituindo nos grupos adimensionais f , e rugosidade relativa da Figura A.1, por exemplo, o diâmetro D pelo diâmetro equivalente D_{eg} definido pela equação (44.5) temos,

$$f = \frac{h_a}{(L/D_{eg})(u^2/2g)}, \quad (44.6)$$

$$Re = D_{eg} u \rho / \mu, \quad (44.7)$$

$$R/\varepsilon = 2R_h/\varepsilon = D_{eg}/2\varepsilon. \quad (44.8)$$

No caso de escoamento laminar, ou se a seção do conduto se afasta muito em aspecto da seção circular, no caso de escoamento turbulento, a simples substituição do diâmetro equivalente nas fórmulas usadas para o cálculo do escoamento em condutos circulares não fornece resultados suficientemente corretos, porque a condição de semelhança geométrica é violada. Para o escoamento laminar, aplicamos as equações de Navier-Stokes no escoamento entre planos paralelos, equação (32.13), e através de seção anular, equação (33.25), como dois exemplos de escoamento através de seções não circulares. Em ambos os exemplos o escoamento pode ser considerado plano; entretanto, a análise tornar-se-ia muito mais difícil se o escoamento tivesse que ser estudado tridimensionalmente na seção não circular.

Curvas de distribuição da velocidade

As curvas de velocidade constante medidas por Nikuradse em condutos de seção triangular e retangular estão representadas na Figura 44.2. Observa-se que nos cantos as velocidades são sempre relativamente mais elevadas. Este fato pode ser justificado pela existência de correntes secundárias nos escoamentos em condutos retos da seção não circular. A Figura 44.3 mostra esses escoamentos secundários que correm em direção aos cantos, ao longo da bissetriz do ângulo voltando, para o centro do conduto ao longo de ambos os lados. Estas correntes secundárias se sobrepõem ao escoamento principal e transportam quantidade de movimento.

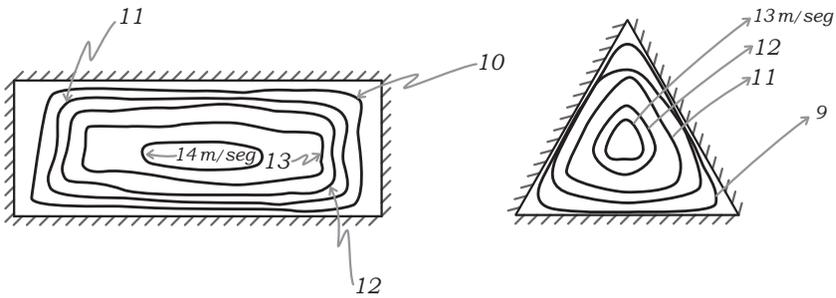


Figura 44.2

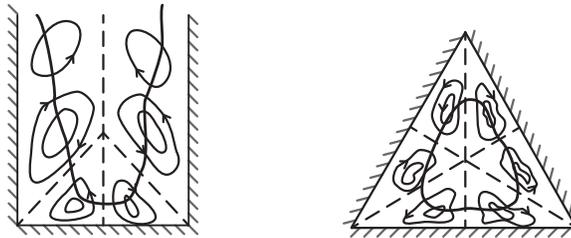


Figura 44.3

Escoamento em condutos curvos

O escoamento em condutos circulares de eixo longitudinal reto, abstraindo-se as pequenas flutuações do escoamento turbulento, pode ser considerado como perfeitamente simétrico. Por outro lado, o escoamento em condutos retos de seção não circular, ou em condutos curvos mesmo de seção circular é assimétrico, sobrepondo-se ao escoamento axial principal correntes secundárias que podem se distribuir não uniformemente ao longo da seção. Nesses casos o movimento axial resultante é do tipo helicoidal.

Nos dutos curvos ocorre o escoamento secundário porque as partículas fluidas nas proximidades do eixo, que têm velocidades mais elevadas, estão sujeitas a pressões centrífugas mais elevadas do que as partículas mais lentas, que escoam nas proximidades da parede. Resultam correntes secundárias dirigidas para fora do centro de curvatura e no eixo de curvatura para dentro nas proximidades da parede (Fig. 44.4a).

A Figura 44.4b mostra a distribuição seccional da velocidade; vemos que as curvas de maiores velocidades se aproximam do contorno mais afastado do centro de curvatura. A Figura 44.4c mostra a distribuição longitudinal das pressões com as zonas de separação da camada-limite onde o gradiente de pressão é adverso, i.e., onde a pressão aumenta a direção do escoamento.

A curvatura do conduto afeta o número de Reynolds crítico de transição do regime laminar para o turbulento, aumentando esse valor.

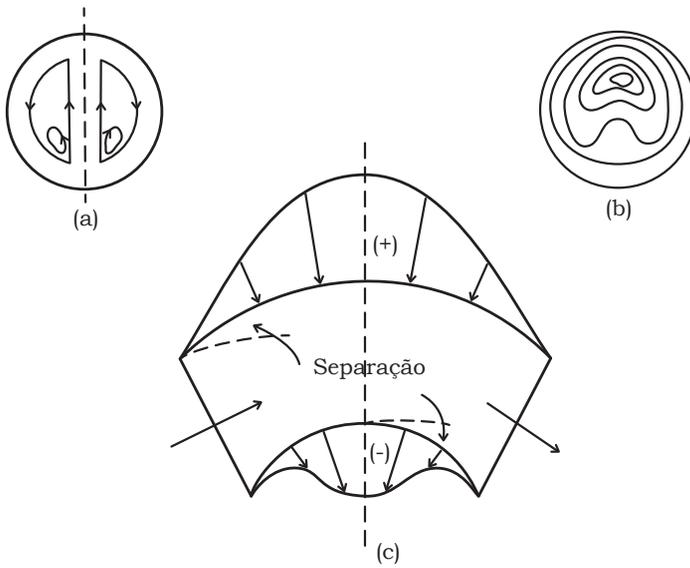


Figura 44.4

Perda de carga em acidentes

É muito raro que um fluido possa ser transportado de um ponto para outro através de uma tubulação completamente constituída de tubo reto. O escoamento é quase sempre perturbado por válvulas, curvas, buchas e luvas de redução ou alargamento, cotovelos, tês e cruzetas. Esses acidentes introduzem perdas de energia que em geral resultam de alterações no vetor velocidade e alterações no módulo, na direção ou em ambos. Ocorrem então separações do escoamento que são responsáveis por perdas adicionais de energia, além das normalmente produzidas pelo escoamento turbulento em duto reto. Essas perdas adicionais dependem muito da forma do acidente – acidentes perfilados introduzindo perdas menores do que os acidentes abruptos, curvas de raio longo produzindo perdas menores do que as curvas fechadas – daí o nome de *atrito de forma* atribuído a essa modalidade de perdas, em contraste com o *atrito de superfície* produzido em tubo reto.

Enquanto a perda de carga por atrito de superfície é calculada por $h_a = f(L/D)(u^2/2g)$ com o valor de f da Figura A.1, a perda de atrito de forma nos acidentes das tubulações industriais é usualmente estimada por métodos baseados em dados experimentais. Como exceção, temos a determinação da perda em acidentes do tipo de alargamento ou diminuição da seção que podem ser calculados pela aplicação das equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia. A equação (23.11) por exemplo:

$$h_a = \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2, \quad (23.11)$$

pode ser usada para determinar a perda de carga na expansão brusca ilustrada na Figura 44.5.

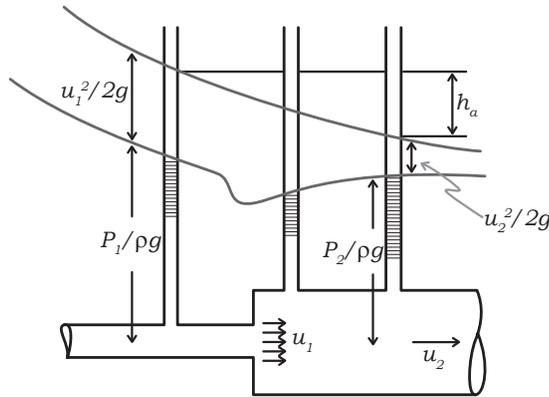


Figura 44.5

Um dos métodos de estimar a perda em acidentes é baseado na expressão:

$$h_{ac} = K \frac{u^2}{2g}, \quad (44.9)$$

onde K é o *coeficiente de resistência* ou *coeficiente de perda*, que é considerado constante para cada tipo de acidente. Segue-se que por esse método admitimos que a perda no acidente é diretamente proporcional à carga de velocidade com K representando então o número dessas cargas. A Tabela A.5 fornece valores médios de K para diversos tipos de válvulas e conexões comerciais.

No caso da expansão brusca, comparando as equações (23.11) e (44.9), temos que

$$h_{ac} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2. \quad (44.10)$$

Quando o tubo descarrega para um reservatório, S_2 é grande e a perda é dada por uma carga de velocidade.

Método do comprimento equivalente

Este método considera a perda de carga no acidente de um certo diâmetro como igual à produzida por um dado comprimento de duto reto de mesmo diâmetro. Portanto,

$$h_{ac} = f \frac{L'}{D} \frac{u^2}{2g}. \quad (44.11)$$

Define-se o comprimento equivalente por

$$L_{eg} = \frac{L'}{D} = \frac{h_{ac}}{f(u^2/2g)}, \quad (44.12)$$

i.e., o comprimento equivalente representa adimensionalmente um certo número de diâmetros do tubo igual ao comprimento de tubo reto que acarreta a mesma perda de carga que o acidente. A Tabela A.6 fornece valores de L_{eg} para alguns tipos de acidentes comerciais.

Considerando em conjunto o acidente mais o duto reto onde ele está instalado, temos as seguintes expressões da perda total

$$h_a + h_{ac} = f \frac{u^2}{2g} \frac{L + L'}{D}, \quad (44.13)$$

$$h_a + h_{ac} = f \frac{u^2}{2g} \left(\frac{L}{D} + L_{eg} \right). \quad (44.14)$$

Comparando as equações (44.9) e (44.12) vemos que o comprimento equivalente relaciona-se com o coeficiente de resistência por

$$K = f L_{eg}. \quad (44.15)$$

A disposição de que tanto K quanto L_{eg} são constantes para cada tipo de acidente deve forçosamente incluir a suposição de que o fator de atrito f é constante, i.e., independe do número de Reynolds. Sabemos que no regime de escoamento turbulento completamente rugoso o valor de f de fato independe do valor de Re . Além disso, para que K e L_{eg} sejam representativos de cada tipo de acidente, é necessário que os diferentes tamanhos de cada tipo sejam não só geometricamente semelhantes como também tenham rugosidades semelhantes. Na prática, as normas de fabricação das válvulas e conexões não incluem uma estrita condição de semelhança geométrica ou de rugosidade entre os diversos tamanhos de um dado tipo de acidente. Por todos esses motivos, os valores das Tabelas A.5 e A.6 devem ser considerados como médios representativos.

Os valores de L_{eg} da Tabela A.6 devem ser corrigidos para os casos de escoamento laminar com $Re < 1.000$ por intermédio da seguinte expressão:

$$L_{eg,e} = \frac{Re_l}{1.000} L_{eg}, \quad (44.16)$$

onde o índice l refere-se ao escoamento laminar.

Referências

SCHLICHTING H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., 1960. Capítulo 20.

Flow of Fluids Through Valves, Fittings and Pipe, Technical Paper no. 410, Crane Co., 1957. Capítulo 2.

Medida hidrodinâmica da vazão

Os métodos hidrodinâmicos de medida de vazão em condutos forçados e canais abertos são baseados na equação da continuidade de massa e na equação de Bernoulli.

Tubo de Pitot

O chamado tubo de Pitot é na realidade uma combinação de um tubo piezométrico com um tubo de Pitot propriamente dito. Essa associação dos dois tubos é conhecida também com o nome de tubo de Prandtl (Fig. 16.6).

Segundo a equação (16.10) a velocidade local medida pelo tubo de Pitot é dada por

$$v = \sqrt{2 \frac{P_t - P}{\rho}} \quad (45.1)$$

onde P_t é a pressão total indicada pelo tubo de Pitot colocado com a boca normal à direção do escoamento e P é a pressão estática medida pelo tubo piezométrico, cujas aberturas são paralelas ao escoamento. Esta expressão é uma aplicação da equação de Bernoulli e inclui portanto a suposição de escoamento ideal. Para levar em conta as perdas de energia inerentes ao escoamento real, corrige-se a equação (45.1) por meio de um coeficiente de aferição C_p , i.e.,

$$v = C_p \sqrt{2 \frac{P_t - P}{\rho}}. \quad (45.2)$$

As perdas no escoamento ao longo do tubo de Pitot são em geral muito pequenas, de modo que C_p tem um valor próximo de 1,0.

Determinado o perfil da velocidade com o auxílio do tubo de Pitot, pode-se calcular a velocidade pela equação $Q = 2\pi \int_0^R v r dr$.

Orifício

A vazão em tubulações é comumente determinada pela instalação de um orifício conforme esquematizada na Figura 45.1. A placa de orifício é colocada entre flanges próprias de modo que o orifício fique concêntrico com o tubo. Os orifícios padronizados por fabricantes especializados devem ser instalados segundo normas rígidas para que os coeficientes de aferição do instrumento possam ser diretamente utilizados. As principais posições das tomadas manométricas na instalação de orifícios padronizados são as seguintes (D.I. denota diâmetro interno e D.N. o diâmetro nominal):

Tipo de tomadas	Distância entre a tomada e a placa	
	Montante	Jusante
Tomadas de duto	2 1/2 D.N.	8 D.N.
Tomadas de “vena”	1 D.I.	0,3 e 0,8 D.I.

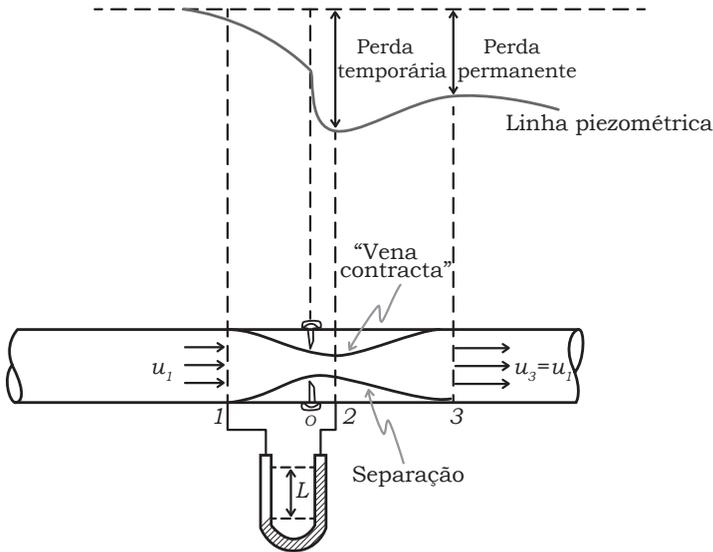


Figura 45.1

Na Figura 45.1 esquematizamos o tipo de tomadas na “vena contracta”; a posição da vena a jusante da placa depende evidentemente do valor do número de Reynolds do escoamento. Além desses dois tipos de tomadas é empregada também a tomada no flange que prende a placa do orifício.

Aplicando a equação de Bernoulli entre as tomadas manométricas, temos,

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (45.3)$$

De acordo com a equação da continuidade $u_2 = u_1(D_1/D_2)^2$, ou, considerando o diâmetro da *vena contracta* igual ao diâmetro D_0 do orifício,

$$u_2 = u_1(D_1/D_0)^2. \quad (45.4)$$

Substituindo esse valor de u_2 na equação (45.3) e tirando o valor de u_1 temos,

$$u_1 = C_0 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_0} \right)^4 - 1 \right]}}, \quad (45.5)$$

onde introduzimos o coeficiente do orifício, C_0 , que leva em conta as correções referentes ao quociente radial da velocidade e às perdas de carga por atrito de superfície e de

forma, existentes entre as seções 1 e 2, e também inclui a relação D_2/D_0 chamada de *coeficiente de contração*.

A partir da equação (45.5) podemos chegar às seguintes equações da vazão volumétrica e de massa

$$Q = C_0 S_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[\left(\frac{D_1}{D_0} \right)^4 - 1 \right]}}, \quad (45.6)$$

$$M = \rho Q = C_0 S_1 \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{\left(\frac{D_1}{D_0} \right)^4 - 1}}. \quad (45.7)$$

Multiplicando o numerador e o denominador desta última expressão por $(D_0/D_1)^2$ chegamos a

$$M = C_0 S_0 \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{\left(1 - \frac{D_0}{D_1} \right)^4}}. \quad (45.8)$$

Esta equação é útil para o cálculo do diâmetro do orifício correspondente a dada vazão mássica M e a queda de pressão $P_1 - P_2$. O denominador pode ser tomado igual a 1,0 como primeira aproximação, i.e.,

$$M = C_0 S_0 \sqrt{2\rho(P_1 - P_2)}, \quad (45.9)$$

o valor de C_0 para orifício de arestas vivas pode ser obtido a partir de gráficos em função do número de Reynolds do orifício $Re_0 = D_0 u_0 / \nu$ e da relação D_0/D_1 entre o diâmetro do orifício e o diâmetro interno do tubo. Para $Re_0 \geq 30,000$ podemos tomar $C_0 = 0,61$; podemos partir desse valor de C_0 como primeira aproximação no cálculo do diâmetro do orifício.

Conforme ilustrado na Figura 45.1 uma parte da queda de pressão entre as tomadas manométricas é recuperada a jusante da “vena contracta”. A perda permanente para uma certa instalação de um orifício de arestas vivas pode ser estimada com o auxílio da Figura A.27, onde a perda permanente é a perda correspondente à leitura manométrica.

A equação (45.6) pode ser combinada com a equação (4.13) que relaciona a queda de pressão com a leitura manométrica L ,

$$P_1 - P_2 = L(\gamma_m - \gamma_f), \quad (4.13)$$

para eliminarmos $P_1 - P_2$ e obtermos a seguinte expressão simples

$$Q = C\sqrt{L}, \quad (45.10)$$

onde o coeficiente C é obtido por aferição direta.

Venturi e Bocal

O contador Venturi e o Bocal (Fig. 45.2) são dois diferentes tipos de medidores de vazão que acarretam perdas permanentes menores que as do orifício. Ambos os medidores introduzem, tal como o orifício, uma restrição no escoamento e a aplicação das equações da continuidade e de Bernoulli conduzem ao seguinte resultado análogo à equação (45.8)

$$M = CS_2 \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}}. \quad (45.11)$$

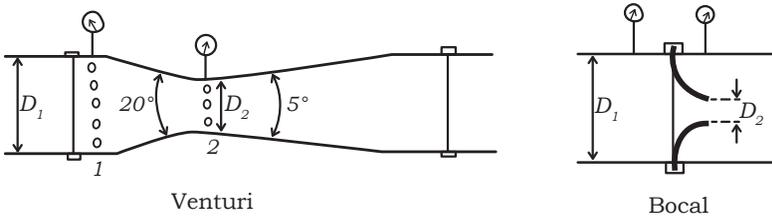


Figura 45.2

No caso de Venturi, quando $Re_2 > 10.000$ e os ângulos têm os valores da Figura 45.2, o coeficiente $C = C_v = 0,98$. Para os bocais $C = C_B$ varia de aproximadamente 0,7 a 0,88 em função de $Re = D_2 u_2$ e D_2/D_1 .

Rotâmetro

Nos medidores até agora considerados a vazão é determinada através da medida da queda de pressão. No rotâmetro (Fig. 45.3) entretanto, a queda de pressão é praticamente constante e o que varia com a vazão é a posição do flutuador dentro do tubo cônico e, com essa posição, a área da seção anular de escoamento. O rotâmetro é então chamado de medidor de área variável.

No flutuador estacionário há equilíbrio entre o peso menor e o empuxo, que atua para baixo, e a força de arrasto, que atua para cima, i.e.,

$$V_i(\rho_i - \rho)g = S_i \Delta P_a, \quad (45.12)$$

onde V_i é o volume do flutuador indicador da vazão, ρ_i a massa específica do flutuador, ρ a massa específica do fluido, S_i a área da maior seção do flutuador e ΔP_a a perda de pressão por atrito com a superfície do flutuador. Tirando o valor de ΔP_a na equação (45.12) temos,

$$\Delta P_a = \frac{V_i}{S_i}(\rho_i - \rho)g. \quad (45.13)$$

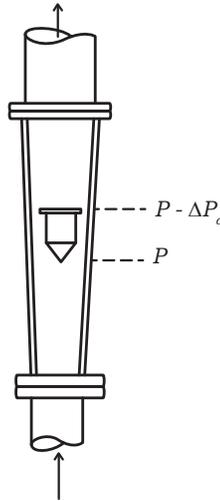


Figura 45.3

Desprezando a perda de carga por atrito com a superfície do tubo e a diferença de cotas correspondentes à altura do flutuador, podemos igualar a queda de pressão do fluido à perda expressa pela equação (45.13), i.e.,

$$\Delta P = \Delta P_a = \frac{V_i}{S_i}(\rho_i - \rho)q. \quad (45.14)$$

Esta expressão mostra que de fato a queda de pressão é praticamente constante no escoamento em torno do flutuador do rotâmetro.

Considerando a seção anular entre o flutuador e o tubo como um tipo de orifício, podemos aplicar ao rotâmetro a equação (45.9) onde $\Delta P = P_1 - P_2$ é dado pela equação (45.14). Portanto,

$$M = C_R S_0 \sqrt{2\rho q(V_i/S_i)(\rho_i - \rho)}. \quad (45.15)$$

A vazão volumétrica é dada por,

$$Q = C_R S_0 \sqrt{2g(V_i/S_i)(\rho_i - \rho)/\rho}. \quad (45.16)$$

Essas expressões mostram que há direta proporcionalidade entre a vazão e a área anular S_0 , mas não são usadas no cálculo da vazão, que é obtida por leitura direta do instrumento aferido em função da posição do indicador. Os valores de C_R para três diferentes tipos de flutuador podem ser obtidos a partir de gráficos parametrizados em função de Re_0 calculado com o diâmetro equivalente $D_1 - D_i$, diferença entre o diâmetro interno do tubo e o diâmetro da maior seção do flutuador. Valores típicos são mostrados na Tabela 45.1.

O terceiro tipo de flutuador induz a turbulência completa tornando C_R independente de Re_0 desde um número de Reynolds igual a 30; deste modo diminuímos o efeito da viscosidade do fluido na aferição do instrumento.

Tipo do flutuador	Valor de C_R
1 	$Re_o 3000, C_R = 0,98$
2 	$Re_o 300, C_R = 0,77$
3 	$Re_o 30, C_R = 0,61$

Tabela 45.1

A equação (45.15) mostra que quando C_R é constante a vazão varia com a massa específica do fluido segundo a relação

$$M = C\rho^{1/2}(\rho_i - \rho)^{1/2}. \quad (45.17)$$

Para que a variação de M com ρ seja mínima temos que $dM/d\rho = 0$, i.e.,

$$\rho_i = 2\rho. \quad (45.18)$$

Portanto, para diminuir o efeito da variação da massa específica do fluido na vazão, devemos construir um flutuador cuja massa específica seja igual ao dobro da massa específica média do fluido. Essa construção é facilitada porque o flutuador pode ser oco.

Vertedores

Os vertedores são dispositivos usados para medir a vazão em canais abertos por intermédio da determinação da altura do líquido acumulado a montante de obstruções colocadas no canal. A Figura 45.4 mostra as principais características de um tipo de *vertedor de soleira delgada*. O escoamento no vertedor pode ser analisado com o auxílio do modelo ilustrado na Figura 45.5, que inclui as seguintes suposições:

- Escoamento ideal, sem perdas;
- Escoamento plano, i.e., $b \gg 1$;
- Linhas de corrente horizontais nas seções 1 e 2;
- Pressão atmosférica embaixo da lâmina vertente;
- Rebaixamento de nível em cima do vertedor desprezível;
- Velocidade desprezível a montante (seção 1).

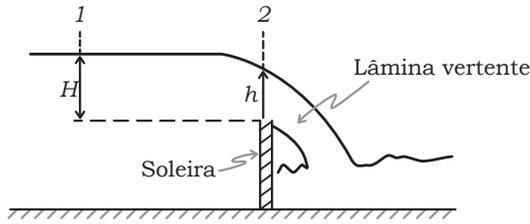


Figura 45.4

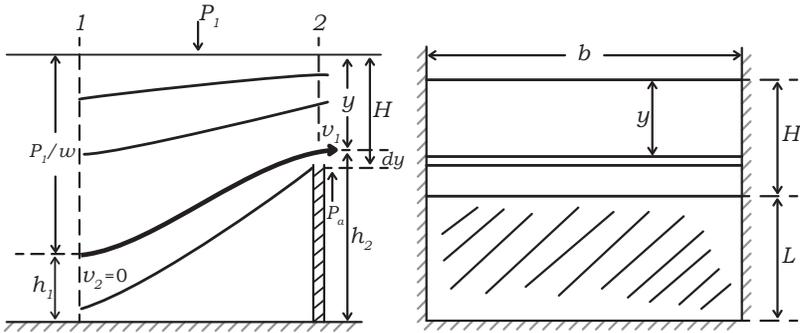


Figura 45.5

Aplicando o teorema de Bernoulli à linha de corrente assinalada na Figura 45.5 temos

$$\frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g}, \quad (45.19)$$

onde $P_1/\rho g = (P_a/\rho g) + L + H - h_1$, $P_2/\rho g = P_a/\rho g$ e $h_2 = L + H - y$; portanto

$$v_2 = v = \sqrt{2gy}. \quad (45.20)$$

Esta expressão mostra que as linhas de corrente mais profundas atingem maiores velocidades porque estão submetidas a maiores pressões. A vazão volumétrica teórica através da seção infinitesimal bdy onde a velocidade é v , é dada por,

$$dQ = v(bdy). \quad (45.21)$$

Substituindo v por seu valor na equação (45.20) e integrando entre $y = 0$ e $y = H$ temos

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2gb} H^{3/2}. \quad (45.22)$$

A contração da veia em cima do vertedor e as perdas reduzem a vazão teórica em cerca de 40%. A vazão real pode ser calculada multiplicando-se a vazão teórica por um coeficiente de carga C , i.e.,

$$Q = C \frac{2}{3} \sqrt{2gb} H^{3/2}. \quad (45.23)$$

Em um dado vertedor aferido a vazão é determinada medindo-se a altura H . Existem inúmeras expressões empíricas da forma geral $Q = C^{te} H^{3/2}$ usadas para calcular a vazão em vertedores padronizados (Francis, Bazin, Poucelet, Rehbock, etc.).

Para medidas de menores vazões em canais abertos é usual o emprego do *vertedor em V* (Fig. 45.6). Partindo das mesmas posições usadas no caso de vertedor de soleira delgada e aplicando a equação de Bernoulli chegamos à equação (45.20) que relaciona a velocidade v com a altura y . A vazão volumétrica é dada por

$$Q = \int_0^H v x dy. \quad (45.24)$$

Por triângulos semelhantes temos

$$\frac{x}{H-y} = \frac{b}{H}, \quad (45.25)$$

onde b/H pode ser expresso em função de α

$$b/H = 2 \tan(\alpha/2) = x/(H-y), \quad (45.26)$$

portanto, substituindo x dado pela equação (45.26) na equação (45.24) e efetuando a integração chegamos à seguinte expressão da vazão teórica:

$$Q = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) H^{5/2}. \quad (45.27)$$

A vazão real é aproximadamente 60% da teórica.

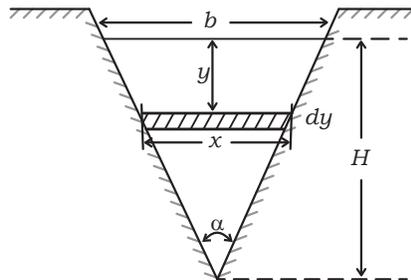


Figura 45.6

A Figura 45.7 mostra esquematicamente o escoamento sobre um vertedor de soleira espessa. Admitindo escoamento ideal, plano com a velocidade desprezível a montante e paralela e uniforme da seção 2, temos, aplicando a equação de Bernoulli

$$H = y + \frac{v^2}{2g}. \quad (45.28)$$

Segue-se que a velocidade constante ao longo de y na seção 2 é dada por

$$v = \sqrt{2g(H-y)}, \quad (45.29)$$

e a vazão volumétrica teórica por

$$Q = by\sqrt{2g(H-y)}. \quad (45.30)$$

Para um dado valor de H a vazão máxima pode ser calculada do seguinte modo

$$dQ/dy = 0 = (H-y)^{1/2} - \frac{1}{2}y(H-y)^{-1/2}, \quad (45.31)$$

$$y = \frac{2}{3}H. \quad (45.32)$$

Substituindo esse valor de y na equação (45.30), temos

$$Q_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2g}. \quad (45.33)$$

A velocidade correspondente a essa descarga máxima é chamada de *velocidade crítica*

$$v_{\text{crítica}} = \sqrt{(2/3)gh} = \sqrt{gy}, \quad (45.34)$$

e é igual à velocidade de propagação de uma onda de superfície. Dentro de uma faixa relativamente grande de valores de v a vazão do vertedor de soleira exposta ajusta-se automaticamente ao valor v_{\max} dado pela equação (45.33), que representa uma condição de equilíbrio estável.

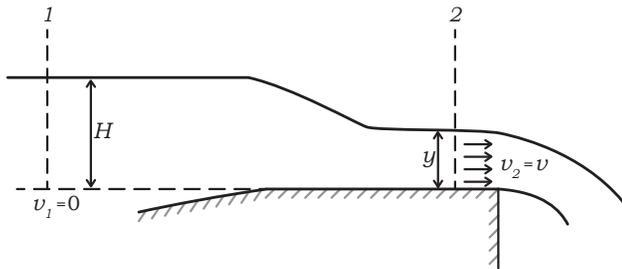


Figura 45.7

Referências

BARNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 6, 1957.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 2, 1957.

TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulicas*, Editora Globo, Capítulo 9, 1960.

Camada-limite

Em muitos problemas do escoamento de fluidos podemos dividir o campo do escoamento em duas regiões distintas. Em uma delas, vizinha às paredes sólidas, atuam as forças viscosas – é a camada-limite. Na outra, mais afastada da parede, não atuam as forças viscosas e o escoamento pode ser considerado ideal.

A Figura 46.1 mostra esquematicamente a camada-limite na parte superior de uma placa plana banhada por uma corrente fluida com ângulo de ataque nulo e velocidade de ataque constante v_0 . O símbolo v_∞ representa a velocidade de escoamento ideal suficientemente afastado da placa. Admitindo que no escoamento ideal em cima da camada-limite as linhas de corrente são paralelas à placa, i.e., desprezando o componente y de v_∞ teremos $v_\infty = v_0$. Percorrida uma dada distância x_c , chamada de *componente crítica*, a camada-limite, que nas proximidades do bordo de ataque é sempre laminar, passa a incluir uma zona turbulenta. Para menores valores de v_0 , entretanto, a camada-limite pode ser laminar por toda extensão da placa. Na camada-limite turbulenta persiste junto à parede uma subcamada laminar; a transição dessa subcamada para a zona turbulenta se faz através de uma zona tampão. Verifica-se experimentalmente que o valor do número de Reynolds $Re_{x_c} = x_c v_\infty / \nu$ é constante, porém depende do formato do bordo de ataque, da rugosidade da parede e das condições de turbulência que prevalecem a montante da placa. Portanto, $x_c \propto v_\infty^{-1} \nu$, i.e., o comprimento crítico é inversamente proporcional à velocidade de ataque e diretamente proporcional à viscosidade do fluido.

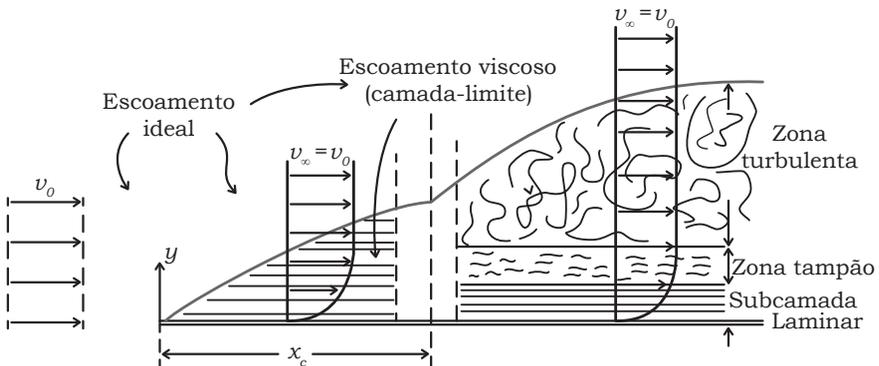


Figura 46.1

A Figura 46.2 mostra a formação e o crescimento da camada-limite na entrada de um tubo. Vemos que depois de um *comprimento de entrada* L_e as forças viscosas passam a atuar de modo significativo por toda a seção do tubo; depois de L_e o perfil da velocidade não mais se altera na direção x .

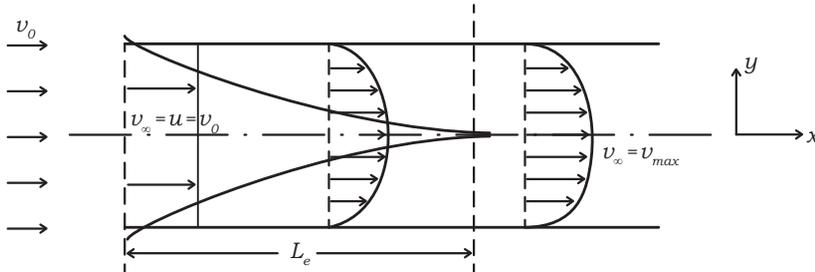


Figura 46.2

No eixo do tubo a velocidade v_∞ varia de $v_0 = u = Q/S$ quando $x = 0$ até $v_\infty = v_{\max}$ quando $x = L_e$; para $x > L_e$ a velocidade no eixo permanece constante e igual à velocidade máxima e o perfil completamente desenvolvido é estabelecido. Podemos aplicar a equação de Bernoulli (11.19) ao miolo do deslocamento limitado pela camada-limite na região de entrada ($x < L_e$), i.e.,

$$P + (\rho v^2/2) = C^{te}, \quad (46.1)$$

onde P representa a pressão devida ao movimento.

Portanto, apesar do escoamento ideal, a pressão P cai ao longo do comprimento de entrada porque a velocidade aumenta com a diminuição da seção. Essas mesmas considerações sobre o comprimento de entrada em tubos aplicam-se ao escoamento entre placas paralelas.

No caso do escoamento laminar em tubos, o comprimento de entrada pode ser estimado pela equação empírica, (33.18)

$$L_e/D = 0,05 \text{ Re}, \quad (33.18)$$

i.e., no limite prático do escoamento laminar quando $Re = 2.000$, $L_e = 1.000$. Para um tubo de 20mm de diâmetro interno, por exemplo, o perfil parabólico do escoamento laminar só se estabelece a uma distância de 2 metros da entrada. Aquém dessa distância não é válida a equação de Poiseuille, (33.17), para o cálculo da perda de pressão.

Ao longo do comprimento de entrada a perda de pressão, igual à queda no caso de tubo reto horizontal, é maior do que a calculada pela equação de Poiseuille porque uma parte da queda é usada para acelerar o miolo do fluido segundo a equação (46.1).

Segundo os dados experimentais de Nikuradse, no caso do escoamento turbulento, o perfil se estabelece a uma distância da entrada que varia de 20 a 40 diâmetros. Nesse caso, o comprimento de entrada depende menos do número de Reynolds do que no escoamento laminar.

Balço de quantidade de movimento na camada-limite

Na Figura 46.3 isolamos um volume de controle $a-b-c-d$, de largura unitária, incluindo a camada-limite que se forma em uma parede plana. Considerando que o crescimento da camada-limite é vagaroso e que a largura da placa é suficientemente extensa, podemos admitir que o escoamento é plano e que o componente v_y da velocidade v é muito pequeno, de modo que a velocidade é essencialmente paralela à parede, i.e., $v_x = v = |\vec{v}|$. Fora da camada-limite a velocidade ideal v_∞ é então igual à velocidade ideal de ataque v_0 (Fig. 46.1).

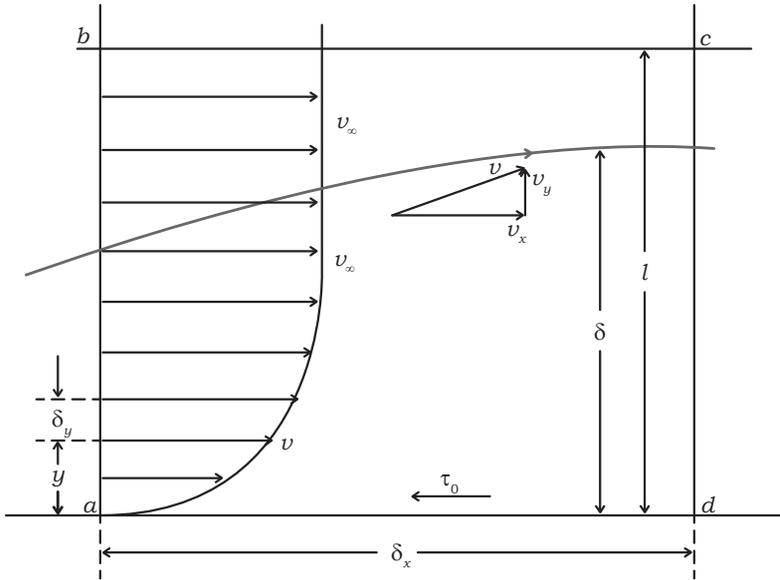


Figura 46.3

Consideremos inicialmente as vazões que entram e saem do volume de controle no caso de escoamento permanente, incompressível:

$$\text{Vazão que entra por a-b} = \rho \int_0^{\ell} v dy, \quad (46.2)$$

$$\text{Vazão que sai por c-d} = \rho \int_0^{\ell} v dy + \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} v dy \right) dx. \quad (46.3)$$

Levando em conta que não há escoamento através de $a-d$, a variação de vazão entre as seções $a-b$ e $c-d$ é devida à vazão que entra em $b-c$, i.e.,

$$\text{Vazão que entra por b-c} = \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} v dy \right) dx. \quad (46.4)$$

Considerando agora o balanço das quantidades de movimento associadas com as vazões que entram e saem do volume de controle, temos as seguintes taxas:

$$\text{Entrada por b-c} = v_{\infty} \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} v dy \right) dx, \quad (46.5)$$

$$\text{Entrada por a-b} = \rho \int_0^{\ell} v^2 dy, \quad (46.6)$$

$$\text{Saída por c-d} = \rho \int_0^{\ell} v^2 dy + \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} v^2 dy \right) dx. \quad (46.7)$$

Segue-se que, na direção x do escoamento, a taxa de aumento da quantidade de movimento do volume de controle é expressa por

$$\begin{aligned} & \text{Saída por c-d} - (\text{Entrada por b-c} + \text{Entrada por a-b}) \\ &= -\rho v_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} v dy \right) dx + \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} v^2 dy \right) dx \\ &= -\rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\ell} v(v - v_{\infty}) dy \right] dx + \rho \frac{dv_{\infty}}{dx} dx \int_0^{\ell} v dy. \end{aligned} \quad (46.8)$$

De acordo com a segunda lei de Newton, a taxa de variação da quantidade de movimento é igual à soma das forças externas que atuam na superfície do volume de controle na direção do movimento. Considerando positivas as forças que atuam na direção x temos:

$$\text{Força de atrito a-d} = dF_0 = -\tau_0 dx, \quad (46.9)$$

$$\text{Força de pressão em a-b} = \int_0^{\ell} P dy, \quad (46.10)$$

$$\text{Força de pressão em c-d} = - \left[\int_0^{\ell} P dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\ell} P dy \right) dx \right]. \quad (46.11)$$

No plano $b-c$ em cima da camada-limite o escoamento é ideal e não atuam forças de cisalhamento, portanto, equilibrando as forças externas a taxa de variação de quantidade de movimento resulta em

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\ell} (v_{\infty} - v) v dy - \rho \frac{dv_{\infty}}{dx} \int_0^{\ell} v dy = \tau_0 + \int_0^{\ell} \frac{dP}{dx} dy. \quad (46.12)$$

Dentro de camadas-limite de pequena espessura podemos desprezar a variação de pressão ao longo de y . Desse modo, admitimos que atua na camada-limite a pressão externa, cuja variação na direção x do escoamento pode ser calculada pela expressão

$$\frac{dP}{dx} = -\rho v_{\infty} \frac{dv_{\infty}}{dx}, \quad (46.13)$$

que resulta da equação de Bernoulli (eq. 46.1). Usamos derivadas totais porque P e v_∞ só variam com x . Substituindo o gradiente longitudinal da pressão dado pela equação (46.13) no último termo do segundo membro da equação (46.12) resulta

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta (v_\infty - v) v dy + \rho \frac{dv_\infty}{dx} \int_0^\delta (v_\infty - v) dy = \tau_0. \quad (46.14)$$

Trocamos os limites de integração porque na faixa $\delta < y < \ell$ o valor de $v_\ell - v$ é nulo. A equação (46.14) pode ser usada tanto para o escoamento laminar quanto para o escoamento turbulento quasi-permanente em que v representa a velocidade média temporal.

Se o escoamento é laminar a tensão τ_0 é dada pela equação (1.6), que pode ser expressa por

$$\tau_0 = -\frac{dF_0}{dx} = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} = v \left[\frac{d(\rho v)}{dy} \right]_{y=0}. \quad (46.15)$$

Um caso de escoamento turbulento, τ_0 representa a tensão total expressa pela equação (39.22), i.e.,

$$\tau_0 = (\mu + \varepsilon) \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0}. \quad (46.16)$$

Para que a equação (41.14) possa fornecer resultados práticos, tais como os valores da espessura da camada-limite ou da tensão na parede e, a partir dessa tensão, o fator de atrito e a perda de carga, é necessário conhecer a expressão analítica do perfil $v - y$ de velocidade dentro da camada-limite. A equação (46.14) é conhecida como equação da quantidade de movimento da camada-limite ou equação integral de von Kármán. É uma equação aproximada, pois inclui as limitações de camada-limite de pequena espessura e crescimento lento.

Referências

ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.M. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 6, 1959.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Applied Hydro and Aeromechanics*, Dover, Capítulo 3, 1957.

Aplicação da equação de Navier-Stokes à camada-limite

Podemos configurar o escoamento na camada-limite com o auxílio da equação de Navier-Stokes simplificada pela omissão de termos de menor efeito. Consideremos um escoamento permanente, incompressível, newtoniano e bidimensional ao longo da superfície de um corpo perfilado (Fig. 47.1) em torno do qual forma-se uma camada-limite, cuja espessura é muito pequena comparada com o raio de curvatura de superfície em qualquer ponto. Para todos os efeitos, a superfície desse corpo comporta-se como um plano muito extenso na direção z . Nesse caso as equações de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, (31.1) a (31.3) reduzem-se a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (47.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (47.2)$$

onde P representa a pressão de movimento, i.e., a pressão total menos a pressão hidrostática gh , pois podemos omitir a atuação da força gravitacional de volume. Além desses dois componentes da equação de Navier-Stokes, aplica-se a esse escoamento plano a equação da continuidade

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (47.3)$$

Essas equações do escoamento devem satisfazer a condição de contorno: $y = 0, v_x = 0$ e $v_y = 0$.

Comparando a ordem de grandeza dos valores dos diversos termos das equações (47.1) a (47.3), Prandtl pôde simplificá-las partindo da observação experimental de que a espessura δ da camada-limite a uma distância x do bordo de ataque de um corpo é pequena comparada com x quando o número de Reynolds xv_∞/ν é grande. Evidentemente, essa observação não se aplica nas proximidades do “bordo de ataque”, como o ponto A do corpo representado pela Figura 47.1, mas pode ser ainda aplicável nas proximidades da ponta de ataque da placa plana com ângulo de ataque nulo (Fig. 46.1). De qualquer modo, as equações simplificadas seguintes são tanto mais corretas quanto menor for a razão entre a espessura da camada-limite e qualquer dimensão linear do corpo.

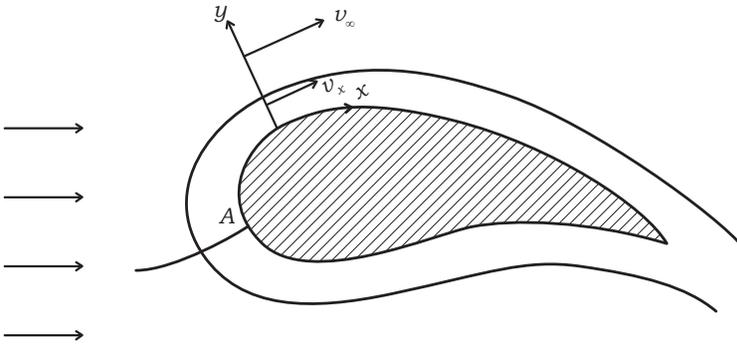


Figura 47.1

Para a estimativa da ordem de grandeza dos termos das equações do movimento, tomemos x como padrão de comparação dos valores das distâncias e v_∞ como padrão de comparação dos valores das velocidades. Na camada-limite, o valor de v_x varia de zero quando $y = 0$ até v quando $y = \delta$, portanto, as ordens de grandeza representadas por O dos valores de v_x e de suas derivadas são os seguintes:

$$v_x = O(1),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = O(1),$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = O(1).$$

Também, de acordo com a equação da continuidade, (47.3), a ordem de grandeza de $\partial v_y / \partial y$ não pode ser maior do que um, i.e., como y varia de zero a δ , o componente v_y deve ter um valor com ordem de grandeza igual a δ . Segue-se que podemos conferir as seguintes ordens de grandezas para os valores de v_y e suas derivadas:

$$\begin{aligned}
v_y &= O(\delta), \\
\frac{\partial v_y}{\partial y} &= O(1), \\
\frac{\delta^2 v_y}{\partial y^2} &= O\left(\frac{1}{\delta}\right), \\
\frac{\partial v_y}{\partial x} &= O(\delta), \\
\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} &= O(\delta).
\end{aligned}$$

Podemos introduzir essas ordens de grandezas nas equações do movimento. Admitindo $\rho = O(1)$, temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\
(1) \quad (1) \quad \left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (\delta) \quad (1) & \qquad (1) \quad \left(\frac{1}{\delta^2}\right)
\end{aligned} \tag{47.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\
(\delta) \quad (1) \quad (1) \quad (\delta) \quad (1) & \qquad (\delta) \quad \left(\frac{1}{\delta}\right)
\end{aligned} \tag{47.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\
(1) \quad (1) &
\end{aligned} \tag{47.3}$$

A ordem de grandeza do gradiente longitudinal de pressão $\partial P/\partial x$ da equação (47.1) pode ser determinada com o auxílio da equação de Bernoulli, (46.1) que prevaleceu no escoamento ideal fora da camada-limite, i.e.,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} + \rho v_\infty \frac{\partial v_\infty}{\partial x} &= 0, \\
(1) \quad (1) \quad (1) &
\end{aligned} \tag{47.4}$$

portanto, $\partial P/\partial x = 0(1)$. Pela ordem de grandeza dos dois termos entre parênteses da equação (47.1), vemos que podemos desprezar $\partial^2 v_x/\partial x^2$ em comparação com $\partial^2 v_x/\partial y^2$. O componente x da força viscosa passa a ser expresso por $\nu(\partial^2 v_x/\partial y^2)$ e deve ter 1 como

ordem de grandeza para que seja considerado, juntamente com os termos restantes. Isto significa que a viscosidade cinemática (e também a dinâmica) deve ter δ^2 como ordem de grandeza.

Aplicando as mesmas considerações de ordem de grandezas no componente y da equação de Navier-Stokes, equação (47.2), onde $v = 0(\delta^2)$, vemos que a ordem de grandeza deve ter δ como ordem de grandeza e todos os termos da equação (47.2) podem ser desprezados em comparação com os de ordem de grandeza 1 da equação (47.1). O fato de $\partial P/\partial y$ ser desprezível significa que a pressão na camada-limite é ditada pela equação de Bernoulli, que governa o escoamento ideal do lado de fora da camada-limite. Diz-se que a pressão é *imposta na camada-limite* pelo escoamento ideal exterior.

Tendo em vista todas as simplificações de ordem de grandeza, as equações de Prandtl da camada-limite são

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (47.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (47.6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (47.7)$$

onde o gradiente de pressão $\partial P/\partial y$ é dado pela equação (47.4) do escoamento externo. Essas equações devem obedecer as seguintes condições limites:

$$\text{quando } y = 0, \quad v_x = 0 \text{ e } v_y = 0,$$

$$\text{quando } y = \delta \quad v_x = v_\infty.$$

A equação (47.5), chamada de equação de Prandtl da camada-limite, é uma equação não linear de derivadas parciais. É, portanto, uma equação de solução difícil. Entretanto, a equação integral de von Kármán, equação (46.14), é de solução bem mais fácil e fornece resultados comparáveis com os fornecidos pela equação de Prandtl nos poucos casos em que esta expressão pode ser resolvida.

Vale ainda ressaltar que esse método de simplificação da equação de Navier-Stokes inclui a suposição de que o valor do número de Reynolds $v_\infty x/\nu$ tem como ordem de grandeza a mesma que $1/\nu$. Portanto, a espessura da camada-limite é dada por uma expressão da forma

$$\delta/x \propto \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (47.8)$$

No caso de escoamento turbulento bidimensional a simplificação por ordem de grandeza nos leva ao seguinte resultado

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial(\overline{v'_x v'_y})}{\partial y}. \quad (47.9)$$

Da mesma maneira que no escoamento laminar a equação (37.6) reduz-se a $\partial P/\partial y$ e a equação da continuidade é expressa pela equação (47.7). Nessas expressões v_x , v_y e P representam grandezas médias temporais. Levando em conta a definição de viscosidade turbilhonar, a equação (39.2), podemos exprimir a equação (47.9) do seguinte modo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \varepsilon) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]. \quad (47.10)$$

A essas equações da camada-limite turbulenta aplica-se as mesmas condições limites do escoamento laminar.

Integração da equação de Prandtl da camada-limite

A integração da equação (47.5) pode conduzir à equação (46.14) de von Kármán. Consideremos como limites da integração, $y = 0$ junto à parede e $y = \ell$ fora da camada-limite:

$$\int_0^\ell \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) dy = 0. \quad (47.11)$$

Termo a termo, as integrações podem ser expressas do seguinte modo:

$$\int_0^\ell v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = v \int_0^\ell d \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\tau_0}{\rho}, \quad (47.12)$$

$$\int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dy = \int_0^\ell \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dy = \frac{\ell}{\rho} \frac{dP}{dx}, \quad (47.13)$$

$$\int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dy = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\ell v_x^2 dy, \quad (47.14)$$

$$\int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y dy = |v_x v_y|_0^\ell - \int_0^\ell \frac{\partial v_y}{\partial y} v_x dy. \quad (47.15)$$

Nesta última equação, de acordo com a equação da continuidade, equação (47.7), temos,

$$\int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y dy = v_\infty v_{y,\infty} + \int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dy. \quad (47.16)$$

Substituindo as equações das integrais, equações (47.12), (47.13) e (47.16) na equação (47.11), resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\ell \rho v_x^2 dy + \rho v_\infty v_{y,\infty} = \ell \left(-\frac{dP}{dx} \right) - \tau_0. \quad (47.17)$$

Com auxílio da Figura 46.3 podemos interpolar os diversos termos dessa última equação do seguinte modo:

$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\ell \rho v_x^2 dy$: variação no volume de controle do fluxo de quantidade de movimento x na direção x ;

$\rho v_\infty v_{y,\infty}$: fluxo de quantidade de movimento x na direção y em $y = \ell$;

$\ell \left(-\frac{dP}{dx} \right)$: força x por unidade de área da superfície sólida, devida ao gradiente de pressão;

τ_0 : força x por unidade de área da superfície sólida, devido ao cisalhamento.

Segue-se que a equação (47.17) representa um balanço de quantidade de movimento no volume de controle $\ell \times \delta \times 1$.

Com o emprego da equação da continuidade, equação (47.17), podemos chegar à seguinte expressão de $v_{y,\infty}$

$$v_{y,\infty} = \int_0^\ell dv_y = \int_0^\ell \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = - \int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial x} dy, \quad (47.18)$$

portanto, o produto $v_\infty v_{y,\infty}$ pode ser expresso por

$$v_\infty v_{y,\infty} = -v_\infty \int_0^\ell \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \frac{dv_\infty}{dx} \int_0^\ell v_x dy - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\ell v_x v_\infty dy \right). \quad (47.19)$$

De acordo com a equação de Bernoulli, dP/dx é dado pela equação (46.13). Portanto, substituindo na equação (45.17) este valor e mais o de $v_\infty v_{y,\infty}$ resulta na equação (46.14) deduzida diretamente por von Kármán

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta (v_\infty - v) v dy + \rho \frac{dv_\infty}{dx} \int_0^\delta (v_\infty - v) dy \right) = \tau_0, \quad (46.14)$$

onde usamos o limite δ em vez de ℓ porque não há variação de quantidade de movimento de δ e ℓ .

Referências

ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.M. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 6, 1959.

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw -Hill Book Co., Capítulo 14, 1960.

KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press, Capítulo 13, 1957.

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 6, 1958.

Espessura da camada-limite

A definição da espessura da camada-limite é normalmente arbitrária, porque a velocidade v aproxima-se assintoticamente da velocidade v_∞ . Pode ser definida, por exemplo, como a distância que vai de $y = 0, v = 0$ até $y = \delta$ quando $v = 0,99v_\infty$.

Espessura de deslocamento δ_d

A vazão volumétrica na camada-limite é expressa por

$$Q_\delta = \int_0^\delta v dy. \quad (48.1)$$

Definimos a espessura de deslocamento δ_d como a distância que devemos afastar da parede uma corrente animada de velocidade uniforme v_∞ para que escoe sem atrito com a mesma vazão Q_δ , dada pela equação (48.1), que passa pela camada-limite. Portanto,

$$Q_\delta = \int_0^\delta v dy = v_\infty(\delta - \delta_d), \quad (48.2)$$

ou, tirando o valor de δ_d

$$\delta_d = \frac{1}{v_\infty} \int_0^\delta (v_\infty - v) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v}{v_\infty}\right) dy. \quad (48.3)$$

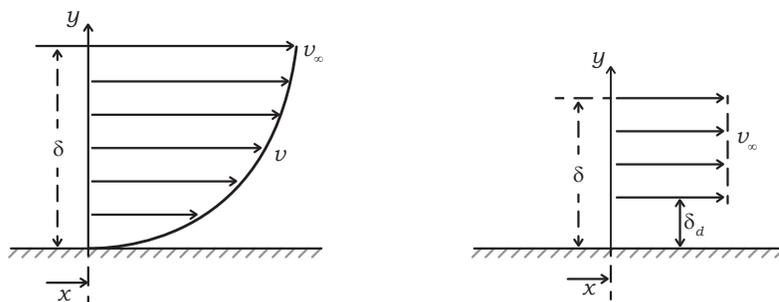


Figura 48.1

A espessura de deslocamento também pode ser definida pelo deslocamento que a camada-limite provoca nas linhas de corrente do escoamento ideal (Fig. 48.2). Se não

houvesse camada-limite e o escoamento fosse ideal até a parede, as linhas de corrente seriam todas paralelas e a vazão entre a parede e uma linha de corrente seria expressa por

$$Q = \int_0^{\ell} v_{\infty} dy. \quad (48.4)$$

Entretanto, por causa da camada-limite, onde a velocidade é menor do que a velocidade ideal, a linha de corrente ℓ se desloca de uma distância δ_d e a vazão volumétrica passa a ser expressa por

$$Q = \int_0^{\ell+\delta_d} v dy = \int_0^{\ell} v dy + v_{\infty} \delta_d, \quad (48.5)$$

porque à distância ℓ da parede a velocidade é uniforme e igual a v_{∞} . Portanto, igualando as equações (48.4) e (48.5), resulta a equação (48.3)

$$\delta_d = \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{v}{v_{\infty}}\right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v}{v_{\infty}}\right) dy. \quad (48.3)$$

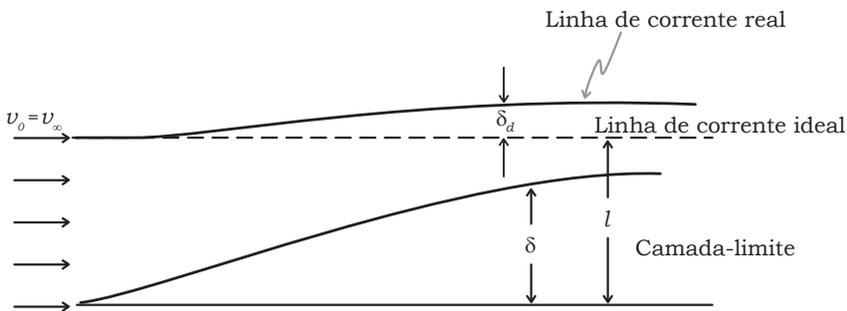


Figura 48.2

A espessura de deslocamento também pode ser interpretada com o auxílio da Figura 48.3, onde vemos que

$$\int_0^{\delta} v dy = v_{\infty} \delta - v_{\infty} \delta_d. \quad (48.6)$$

Portanto, as áreas hachuradas são iguais a δ_d .

Espessura de quantidade de movimento

A espessura de quantidade de movimento é definida com a espessura coberta por uma vazão ideal animada de uma quantidade de movimento igual à “perdida” na camada-limite pelo escoamento real. Se o escoamento fosse ideal, a taxa de quantidade de movimento que passa entre a parede e ℓ (Fig. 48.2) seria expressa por

$$\rho \int_0^{\ell} v_{\infty}^2 dy. \quad (48.7)$$

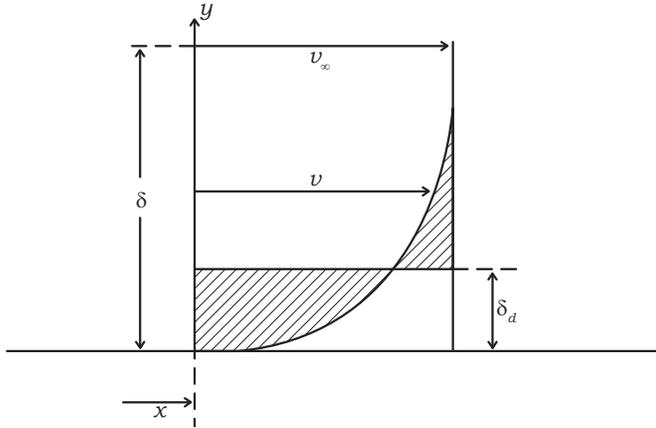


Figura 48.3

Entretanto, no escoamento real, a taxa da mesma massa passa entre a parede e a linha de corrente deslocada, i.e.,

$$\text{taxa real de q.m.} = \rho \int_0^{\ell + \delta_d} v^2 dy = \rho \left(\int_0^{\ell} v^2 dy + v_\infty^2 \delta_d \right). \quad (48.8)$$

Substituindo nesta equação δ_d por seu valor expresso pela equação (48.3), chegamos à seguinte expressão da “perda”, que corresponde à diferença entre a taxa real e a ideal:

$$\delta_m \rho v_\infty^2 = \rho \left[\int_0^{\ell} (v_\infty^2 - v^2) dy - v_\infty \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) dy \right]. \quad (48.9)$$

Tirando o valor de δ_m e simplificando, temos,

$$\delta_m = \int_0^{\ell} \frac{v}{v_\infty} \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{v}{v_\infty} \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) dy. \quad (48.10)$$

Introduzindo na equação (46.14) as definições das espessuras de deslocamento e quantidade de movimento, respectivamente equações (48.3) e (48.10), resulta a seguinte expressão simples da equação integrada da camada-limite

$$\frac{d}{dx} (v_\infty^2 \delta_m) + \delta_d v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (48.11)$$

Camada-limite sobre placa plana

No escoamento ao longo de uma placa plana podemos considerar que a velocidade v_∞ fora da camada-limite é praticamente constante, portanto, na equação integral de von Kármán, equação (46.14), $dv_\infty/dx = 0$ e

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (v_\infty - v) v dy. \quad (48.12)$$

Por sua vez, a equação (48.11) é simplesmente dada por

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}(v_\infty^2 \delta_m). \quad (48.13)$$

A equação de Bernoulli indica que se v é constante a pressão P imposta na camada-limite também o é, i.e., segundo a equação (47.4), $dP/dx = 0$.

Escoamento laminar

Perfil de velocidade. A relação $v - y$ na camada-limite deve satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} y = 0, \quad v = 0, \\ y = \delta, \quad v = v_\infty, \quad \partial v / \partial y = 0. \end{aligned}$$

Além disso, segundo a equação de Prandtl da camada-limite, equação (47.5), podemos estipular mais uma condição de contorno para o perfil da velocidade. Junto à parede ($y = 0$), tanto v_x como v_y são nulos e, como na placa $\partial P / \partial x$ também é nulo, temos

$$y = 0, \quad \partial^2 v / \partial y^2 = 0.$$

A expressão cúbica com quatro constantes

$$v = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (48.14)$$

satisfaz a quatro condições de contorno estipuladas. As constantes são então determinadas aplicando-se à equação (48.14) as quatro condições, i.e.,

$$a = 0, \quad c = 0, \quad v_\infty = b\delta + d\delta^3, \quad 0 = b + 3d\delta.$$

Portanto, tiramos os seguintes valores de b e d

$$\begin{aligned} b &= (3/2)(v_\infty/\delta), \\ d &= -(1/2)(v_\infty/\delta^3). \end{aligned}$$

Segue-se que o perfil é expresso pela equação adimensional

$$\frac{v}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \quad (48.15)$$

Espessura da camada-limite. Substituindo a relação adimensional $v - y$ do perfil da velocidade, equação (48.15), na integral da quantidade de movimento do segundo membro da equação (48.12), temos

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \rho(v_\infty - v)v dy &= \frac{39}{280} \rho v_\infty^2 \delta \\ &= \int_0^\delta \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] dy. \end{aligned} \quad (48.16)$$

No escoamento laminar, a tensão na parede τ_0 é expressa pela equação (46.15), portanto, calculando $(dv/dy)_{y=0}$ com o auxílio do perfil, equação (48.15), temos

$$\tau_0 = \frac{3}{2} \mu \frac{v_\infty}{\delta}. \quad (48.17)$$

Substituindo essas duas expressões na equação da quantidade de movimento, equação (48.12), chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{39}{280} \rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \mu \frac{v_\infty}{\delta}. \quad (48.18)$$

Separando as variáveis e integrando, temos,

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} + C^{te}. \quad (48.19)$$

Levando em conta a condição na ponta da placa, $x = 0$, $\delta = 0$, vemos que a constante nessa equação é nula, portanto, podemos exprimir a equação (48.19) do seguinte modo

$$\frac{\delta}{x} = 4,64 \left(\frac{x v_\infty}{\nu} \right)^{-1/2} = \frac{4,64}{\text{Re}_x^{1/2}}. \quad (48.20)$$

Esta expressão confirma a forma da equação (47.8) que foi deduzida por análise de ordem de grandeza das equações de Prandtl da camada-limite. A equação (48.20) permite calcular a espessura da camada-limite laminar por toda a placa ou na ponta, de $x = 0$ a $x = x_c$, caso o escoamento passe a turbulento. Podemos também estabelecer a relação entre o número de Reynolds calculado com o comprimento x e o calculado com a espessura δ , i.e.,

$$\text{Re}_x = \left(\frac{\text{Re}_\delta}{4,64} \right)^2. \quad (48.21)$$

A espessura de deslocamento pode ser calculada substituindo-se o perfil cúbico, equação (48.15), na equação (48.3) que define aquela espessura. Resulta em

$$\delta_d = 0,375\delta \simeq (1/3)\delta. \quad (48.22)$$

A espessura de quantidade de movimento pode ser determinada substituindo-se na equação (48.10) o valor de ν tirado do perfil, equação (48.15), e integrando, i.e.,

$$\delta_m = (39/280)\delta = 0,139\delta \simeq (1/7)\delta. \quad (48.23)$$

Tensão na parede. A tensão local na parede a uma certa distância x da ponta da placa pode ser calculada a partir da equação (48.17), onde substituímos δ com o auxílio da equação (48.20), que relaciona δ com x , i.e.,

$$\tau_0 = 0,323 \frac{\rho v_\infty^2}{\text{Re}_x^{1/2}}. \quad (48.24)$$

Podemos também exprimir τ_0 em função de Re_δ com o emprego da equação (48.21), i.e.,

$$\tau_0 = 1,5 \frac{\rho v_\infty^2}{Re_\delta}. \quad (48.25)$$

A equação (48.24) mostra que a tensão de cisalhamento que é equivalente ao fluxo de quantidade de movimento varia ao longo da placa de acordo com $\tau_0 \propto x^{-1/2}$. A tensão média entre a ponta, onde $x = 0$, e uma distância L qualquer (menor que x_c se o escoamento é turbulento) pode ser determinada por

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_0 dx = 2\tau_0. \quad (48.26)$$

Portanto, a tensão média na parede da placa pode ser calculada pelas expressões

$$\bar{\tau}_0 = 0,646 \frac{\rho v_\infty^2}{Re_L^{1/2}}, \quad (48.27)$$

$$\bar{\tau}_0 = 3 \frac{\rho v_\infty^2}{Re_\delta}. \quad (48.28)$$

Nos cálculos da perda de carga por atrito é usual o emprego do *fator de atrito* em vez da tensão na parede. No escoamento laminar em tubos o fator de atrito foi definido pela equação (33.21), i.e.,

$$f = 4[\tau_0 / (\rho u^2 / 2)].$$

No presente caso da placa plana, é conveniente definir um fator de atrito f_p que também represente a razão entre a tensão na parede e a pressão dinâmica, pela relação

$$f_p = \frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2 / 2}. \quad (48.29)$$

Segue-se que podemos ter as seguintes expressões do fator de atrito local e médio

$$f_p = 0,646 / Re_x^{1/2}, \quad (48.30)$$

$$f_p = 3 / Re_\delta, \quad (48.31)$$

$$f_p = 1,292 / Re_L^{1/2}, \quad (48.32)$$

$$f_p = 6 / Re_\delta. \quad (48.33)$$

Na Tabela 48.1 comparamos as expressões do fator de atrito obtidas a partir da equação integrada de von Kármán, equação (48.12), com as expressões resultantes da integração das equações de Prandtl da camada-limite, equação (47.5) a (47.7). Na equação aproximada de von Kármán repetimos as soluções obtidas com o perfil expresso pela equação (48.14) e mostramos ainda as soluções obtidas por outro perfil. Considerando exatos os resultados obtidos das equações de Prandtl vemos que as soluções baseadas na equação de von Kármán são satisfatórias.

Método	Equações	Fator de atrito
Solução exata das eqs. de Prandtl	(47.5) (47.6) (47.7)	$f = 0,644 / \text{Re}_x^{1/2}$
Solução aproximada da equação de von Kármán, eq. (48.12)	(48.14)	$f = 0,646 / \text{Re}_x^{1/2}$
	$\nu = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4$	$f = 0,686 / \text{Re}_x^{1/2}$

Tabela 48.1

Referências

LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology, Capítulo 6, 1958.

ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.M. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 6, 1959.

Escoamento turbulento

Perfil de velocidade. Consideraremos que o perfil de velocidade na camada-limite turbulenta da placa plana pode ser expresso pela equação (49.1)

$$\frac{v}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \quad (49.1)$$

análoga à equação (40.28) do perfil da velocidade no escoamento plano ($x > x_0$) e turbulento em tubulações. Admitiremos também que a tensão na parede da placa pode ser expressa da mesma forma que na parede de dutos pela equação de Blasius, análoga à equação (40.21), i.e.,

$$\tau_0 = 0,0228 \frac{\rho v_\infty^2}{\text{Re}_\delta^{1/4}}. \quad (49.2)$$

Portanto, tal como demonstramos no caso do escoamento em dutos, para que a tensão na parede da placa seja expressa pela equação (49.2), é forçoso que o expoente $1/n$ da equação (49.1) seja igual a $1/7$, i.e., analogamente à equação (40.7),

$$\frac{v}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}. \quad (49.3)$$

Tal como em dutos, verificou-se que essas expressões representam bem os dados experimentais da tensão na parede e do perfil da velocidade. Em tubos, mostramos que a concordância da equação de Blasius com os resultados empíricos era na faixa de $\text{Re}_D = \rho u D / \mu$ até aproximadamente 10^5 . No caso da placa, essa faixa baseada em $\text{Re}_x = \rho v_\infty x / \mu$ vai até aproximadamente 10^7 . Neste ponto, convém assinalar que na placa é o número de Reynolds $\text{Re}_\delta (\delta v_\infty \rho / \mu)$ que corresponde ao Re_D do tubo.

Admitindo válido o perfil expresso pela equação (49.3), podemos chegar ao seguinte valor do gradiente de velocidade

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{7} \frac{v_\infty}{\delta^{1/7} y^{1/7}}. \quad (49.4)$$

Aplicando esta expressão ao gradiente junto à parede em $y = 0$, vemos que ela fornece como resultado $dv/dy = \infty$. Evidentemente, este resultado não é fisicamente possível e o perfil expresso pela equação (49.3) não pode ser estendido até à parede. Ocorre entretanto que, mesmo no escoamento turbulento, está sempre presente junto à parede uma subcamada laminar de espessura δ_b (Fig. 49.1), de modo que o perfil turbulento, na realidade, não iria até a parede. Na subcamada laminar, que é de espessura muito

pequena, podemos admitir que o perfil da velocidade é representado por uma reta. Em muitos casos, entretanto, é usual supor que o perfil expresso pela equação (49.3) se estende até $y = 0$, desprezando-se desse modo a pequena transferência de quantidade de movimento que ocorre na subcamada laminar.

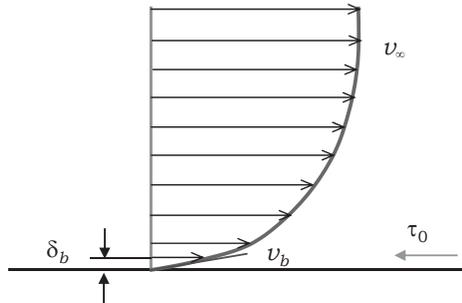


Figura 49.1

Espessura da camada-limite. Substituindo-se na equação (48.12) v em função de y dado pelo perfil da equação (49.3) e integrando, resulta

$$\tau_0 = \frac{7}{72} \rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad (49.5)$$

Igualando este valor da tensão na parede ao expresso pela equação de Blasius (eq. 49.2) e separando as variáveis, temos,

$$\delta^{1/4} d\delta = 0,235 \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^{1/4} dx. \quad (49.6)$$

Levando a integração desta equação até a ponta da placa onde $x = 0$ e $\delta = 0$, i.e., passando pela camada-limite laminar que vai de $x = 0$ até $x = x_0$, temos

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,376}{\text{Re}_x^{1/5}}. \quad (49.7)$$

Desta expressão podemos tirar a relação entre o número de Reynolds Re_x e o Re_δ , i.e.,

$$\text{Re}_\delta = 0,376 \text{Re}_x^{4/5}. \quad (49.8)$$

Comparando as equações (48.20) que dá a relação $\delta - x$ na camada-limite laminar com a equação (49.7) da camada-limite turbulenta, vemos que enquanto na laminar $\delta \propto x^{1/2}$, na turbulenta $\delta \propto x^{4/5}$, i.e., a camada-limite cresce mais rapidamente quando o escoamento é turbulento. Esse crescimento é devido à “perda” de quantidade de movimento na camada-limite.

A equação (49.8) mostra que o valor superior limite de Re_x aproximadamente igual a 10^7 para aplicação da equação empírica de Blasius, equação (49.2), é a mesma coisa que

Re_δ aproximadamente igual a 10^5 , i.e., o mesmo valor que o do limite superior de Re_D em tubos.

Substituindo o perfil expresso pela equação (49.3) nas equações (48.3) e (48.10) e integrando, chegamos às seguintes expressões das espessuras de deslocamento e da quantidade de movimento da camada-limite turbulenta

$$\delta_d = \delta/8, \quad (49.9)$$

$$\delta_m = (7/92)\delta. \quad (49.10)$$

Espessura da subcamada laminar. Ao longo da espessura da subcamada laminar, conforme mostramos na Figura 49.1, podemos admitir um gradiente linear da velocidade; portanto, a tensão na parede dada pela equação (46.15) pode ser expressa por

$$\tau_0 = \mu \frac{v}{y}. \quad (49.11)$$

Igualando este valor de τ_0 ao expresso pela equação de Blasius e tirando o valor de v resulta

$$v = 0,0228\rho v_\infty^2 \frac{1}{\mu} \left(\frac{v}{v_\infty \delta} \right)_y^{1/4}. \quad (49.12)$$

Quando $y = \delta_b$ a velocidade superior da subcamada laminar é $v = v_b$, portanto, a equação (49.12) pode ser expressa por

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \frac{v_b}{v_\infty} \frac{1}{0,0228} \left(\frac{v}{v_\infty \delta} \right)^{3/4}. \quad (49.13)$$

Por outro lado, admitindo que a subcamada laminar faz fronteira com a zona turbulenta onde o perfil da velocidade é expresso pela equação (49.3), temos

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \left(\frac{v_b}{v_\infty} \right)^7. \quad (49.14)$$

Portanto, igualando os segundos membros dessas duas expressões chegamos a

$$\frac{v_b}{v_\infty} = \frac{1,878}{Re_\delta^{1/8}}. \quad (49.15)$$

Com o auxílio da equação (49.8) que relaciona Re_δ com Re_x podemos chegar à seguinte expressão de v_b

$$\frac{v_b}{v_\infty} = \frac{2,12}{Re_x^{0,1}}. \quad (49.16)$$

O valor de δ_b pode ser determinado substituindo-se esses dois últimos valores de v_b/v_∞ na equação (48.17), i.e.,

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \frac{194}{\text{Re}_x^{0,7}}, \quad (49.17)$$

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \frac{108}{\text{Re}_\delta^{7/8}}. \quad (49.18)$$

Eliminando δ da equação (49.17) com o auxílio da equação (49.7) chegamos à seguinte expressão

$$\frac{\delta_b}{x} = \frac{72}{\text{Re}_x^{0,9}}. \quad (49.19)$$

Esta última expressão mostra que $\delta_b \propto x^{0,1}$, i.e., o crescimento da subcamada laminar é muito lento.

Tensão na parede. A tensão local na parede da placa é dada pela equação de Blasius, equação (49.2)

$$\tau_0 = 0,0228 \frac{\rho v_\infty^2}{\text{Re}_\delta^{1/4}}. \quad (49.20)$$

Com a relação entre Re_δ e Re_x , equação (49.8), podemos exprimir a tensão na parede em função de Re_x , i.e.,

$$\tau_0 = 0,0296 \frac{\rho v_\infty^2}{\text{Re}_x^{1/5}}. \quad (49.21)$$

Admitindo que a camada-limite turbulenta se estende até a ponta da placa podemos chegar às seguintes expressões da tensão média

$$\bar{\tau}_0 = 0,037 \frac{\rho v_\infty^2}{\text{Re}_L^{1/5}}, \quad (49.22)$$

$$\bar{\tau}_0 = 0,029 \frac{\rho v_\infty^2}{\text{Re}_\delta^{1/4}}. \quad (49.23)$$

Os fatores de atrito correspondentes a essas quatro expressões da tensão na parede são

$$f_p = 0,0592 / \text{Re}_x^{1/5}, \quad (49.24)$$

$$f_p = 0,0456 / \text{Re}_x^{1/4}, \quad (49.25)$$

$$\bar{f}_p = 0,074 / \text{Re}_L^{1/5}, \quad (49.26)$$

$$\bar{f}_p = 0,058 / \text{Re}_\delta^{1/4}. \quad (49.27)$$

Camada-limite na placa e no tubo

Dados experimentais demonstram que a camada-limite sobre placa plana passa de laminar para turbulenta quando

$$\text{Re}_{x_c} = \frac{v_\infty x_c}{\nu} = 5 \times 10^5. \quad (49.28)$$

Segundo a equação (48.19), onde a constante é nula, a espessura da camada-limite laminar na placa é dada por

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}. \quad (49.29)$$

Tomando $x = x_c$ nessa expressão e substituindo esse valor de x_c na equação (49.28) chegamos a

$$\frac{v_\infty \delta}{\nu} = 2.100, \quad (49.30)$$

com o valor do número de Reynolds Re_δ na transição de camada-limite laminar para turbulenta na placa plana. Este resultado é praticamente igual ao valor do número de Reynolds Re_D de transição no escoamento pleno em tubos. De fato, no tubo, a distribuição parabólica da velocidade correspondente a $u = v_\infty/2$, onde v_∞ representa a velocidade axial e $\delta = D/2$. Segue-se que podemos estender para o escoamento em tubos o conceito da camada-limite, considerando que nesse caso a velocidade v_∞ representa a velocidade no eixo e $R = D/2$ a espessura da camada-limite. No escoamento pleno ($x > L_e$) o perfil da velocidade e a espessura da camada-limite não sofrem alterações.

Apesar da analogia entre as camadas-limites na placa e em tubulação, existem também diferenças fundamentais: assim, enquanto o escoamento no tubo exige uma queda de pressão para sua manutenção, o escoamento na placa plana pode se realizar com a pressão praticamente constante, conforme mostra a equação (48.12). Por outro lado, a camada-limite da placa deve crescer de espessura continuamente para compensar a “perda” de quantidade de movimento devida ao atrito, enquanto a camada-limite no tubo só cresce ao longo do comprimento de entrada L_e até atingir o eixo.

Referências

ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.M. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 6, 1959.

COULSON, J.M.; RICHARDSON, J.F. *Chemical Engineering*, Vol. I, McGraw Hill Books Co., Capítulo 9, 1954.

GROBER, H., ERK, S.; GRIGUEL, U. *Fundamentals of Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 8, 1961.

Separação da camada-limite

Sob determinadas circunstâncias, a lentidão do movimento do fluido na camada-limite pode se acentuar de tal maneira que chegue a produzir um retrocesso do escoamento. Quando isto ocorre a camada-limite se separa da parede para dar lugar a redemoinhos (vórtices). A separação pode ocorrer, por exemplo, ao longo de superfícies de curvatura pronunciada, tal como a de um cilindro circular transversal ao escoamento ilustrado na Figura 50.1. A seção circular considerada está suficientemente afastada das pontas do cilindro para que o escoamento possa ser considerado bidimensional. Fora da camada-limite a influência das forças viscosas é desprezível e a relação entre a velocidade v_∞ e a pressão P é expressa pela equação de Bernoulli de escoamento ideal. A espessura da camada-limite é usualmente muito pequena, de modo que a pressão no seu interior é imposta pelo escoamento ideal exterior. A Figura 50.2 mostra as linhas de corrente do escoamento ideal em torno do cilindro circular. A linha de corrente ψ_0 divide o escoamento em duas partes simétricas, de modo que basta estudar o escoamento em torno do semicilindro ABC . No escoamento ideal as partículas fluidas são aceleradas no quarto AB a montante e retardadas ao longo do quarto BC a jusante, portanto, de acordo com a equação de Bernoulli a pressão cai de A a B e sobe de B a C conforme mostra a curva de variação da pressão na Figura 50.2.

As partículas fluidas que seguem as linhas de corrente mais próximas da parede do cilindro, por exemplo, ψ_a em comparação com ψ_e , estão animadas de velocidades maiores do que as que seguem as linhas de corrente mais afastadas. Segue-se que os elementos limitados por duas linhas de corrente adjacentes sofrem distorção mas não sofrem rotação, tal como na Figura 13.6a. Na Figura 50.2 admitimos que a linha de corrente ψ_f está suficientemente longe do cilindro, de tal sorte que as partículas que por ela caminham estejam animadas da velocidade v_0 constante em módulo e direção. Então, fora do espaço 1234 o escoamento é considerado ideal e unidimensional, enquanto dentro desse espaço as linhas de corrente são deformadas pela presença do cilindro e o escoamento passa a bidimensional, se bem que ainda ideal e irrotacional.

Voltando ao escoamento real ilustrado pela Figura 50.1, podemos considerar que a forma do cilindro é modificada pela adição da zona de redemoinhos $SCS'D$ limitada pelas linhas de separação SD e $S'D$ e que o escoamento passa a contornar este novo perfil. A Figura 50.3 mostra as linhas de corrente que contornam o cilindro perfilado pelos redemoinhos.

As partículas de fluido que se movem na camada-limite que se forma nas vizinhanças da parede do cilindro estão sujeitas às variações de pressão impostas pelo escoamento

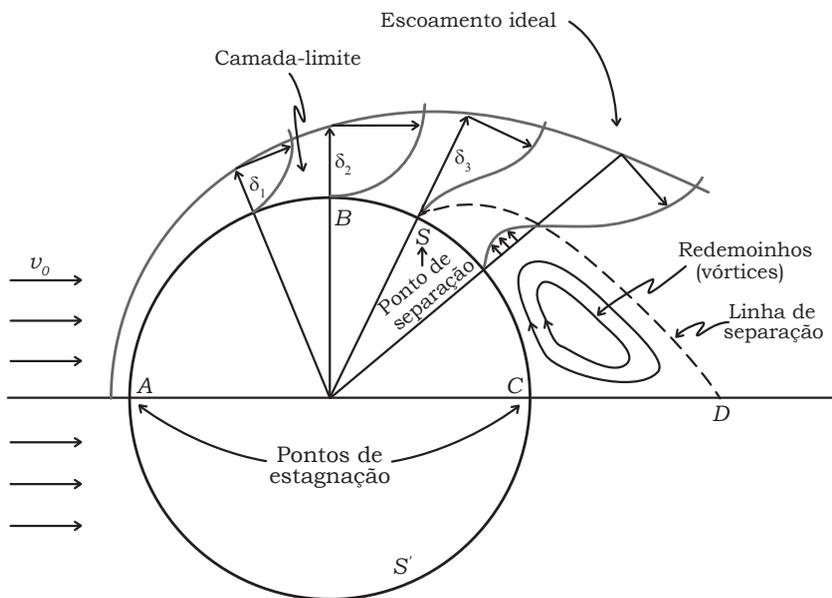


Figura 50.1

exterior. As energias cinéticas dessas partículas são grandemente “consumidas” pelas forças de atrito que prevalecem na camada-limite. O percurso de A a B (Fig. 50.1) pode acarretar tanta “perda” de energia cinética que as partículas não têm mais como escoarem contra o aumento de pressão que atua de B a C. Esse aumento de pressão externa acaba então por provocar o retrocesso das partículas com a formação dos redemoinhos. No ponto S junto à parede há o início da reversão e separação da camada-limite – é o *ponto de separação*. Contando os ângulos a partir do ponto A, quando o escoamento na camada-limite é laminar, o ponto de separação situa-se em torno de 82° , entretanto, quando o escoamento é turbulento as partículas da camada-limite têm mais energia cinética para converter em energia de pressão, de sorte que podem penetrar mais na região de pressões crescentes e situar o ponto de separação nas proximidades de 110° , i.e., já no “bordo” de fuga do cilindro circular. Pode-se dizer que a camada-limite turbulenta abraça mais o obstáculo, diminuindo a largura da zona de redemoinhos.

No escoamento em condutos forçados a separação pode ocorrer em curvas (Fig. 44.4) de cotovelos, nos orifícios de medida de vazão (Fig. 45.1) em buchas ou luvas de expansão ou redução e em válvulas globo ou de gaveta entreabertas. No escoamento em difusores (Fig. 50.4), pode ocorrer também a separação quando o ângulo de divergência é muito pronunciado e o aumento de pressão que acompanha a diminuição de velocidade é muito elevado. No difusor bem desenhado, cujo ângulo de divergência é menor do que cerca de 7° , não há separação e as “perdas” de energia são menores (Fig. 50.5).

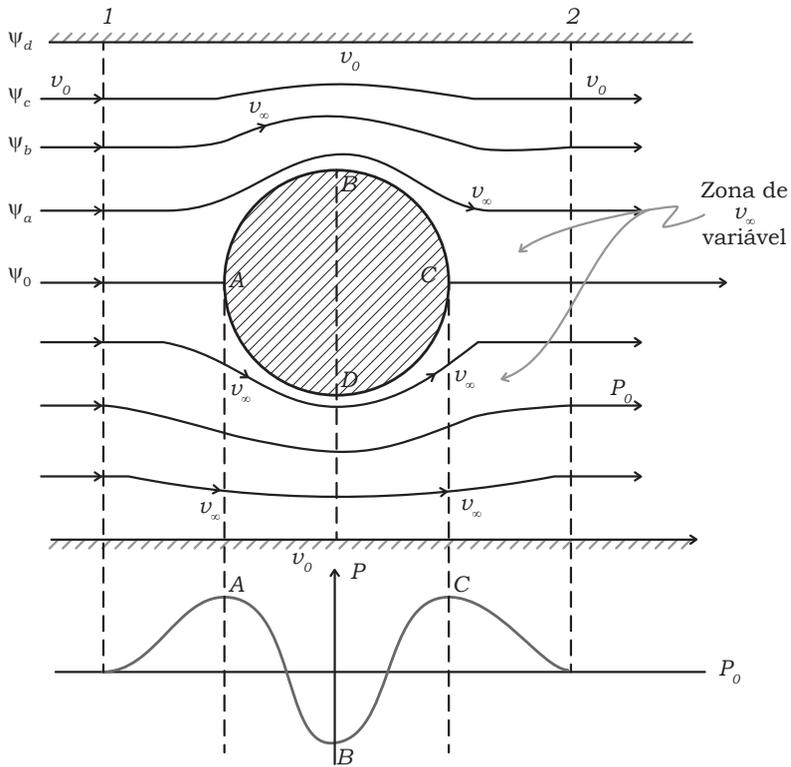


Figura 50.2

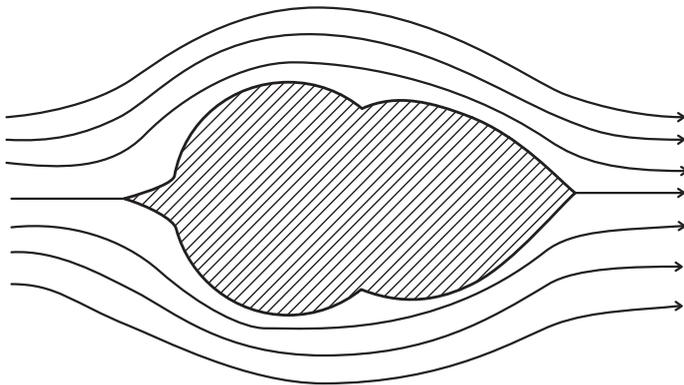


Figura 50.3

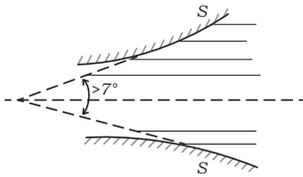


Figura 50.4

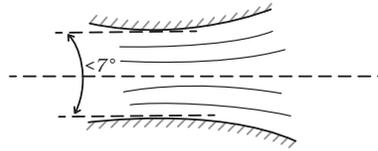


Figura 50.5

Resistência de superfície e resistência de forma

Os redemoinhos e turbilhões que aparecem quando a camada-limite se separa formam-se à custa da dissipação das chamadas energias de escoamento, cinética, de pressão e potencial. A perda de carga por atrito h_a do balanço de carga, equação (20.6) deve, portanto, incluir a energia de escoamento transformada em calor por degradação dos redemoinhos e turbilhões. Quando tratamos da perda de carga nos chamados acidentes de encanamentos, mostramos que devíamos distinguir entre o atrito de superfície e o atrito de forma. Enquanto o primeiro pode ser calculado diretamente pela equação $h_a = f(L/D)u^2/2g$, com f determinado na Figura A.1 e referente ao escoamento em tubulações retas, o atrito ou resistência de forma é estimado por métodos empíricos, tais como o do comprimento equivalente. Quando as duas resistências contribuem para a perda total é em geral muito difícil separar uma da outra nos acidentes de encanamentos comerciais. O comprimento equivalente inclui tanto o atrito de superfície quanto o de atrito de forma, se bem que com predominância frequente desta última.

O valor do atrito de forma depende do tamanho e da frequência dos redemoinhos (vórtices) e turbilhões e também da posição do ponto de separação, que por sua vez determina a largura da esteira. Chamamos de *esteira* a região a jusante do ponto de separação que é afetado por redemoinhos e turbilhões. Sob determinadas condições de escoamento os redemoinhos podem se soltar do corpo para formar uma esteira longa. Em *corpos perfilados* (Fig. 50.6), a separação ocorre perto do bordo de fuga e predomina o atrito de superfície, ao passo que em *corpos cegos* (Fig. 50.7) a esteira é larga e o atrito de forma é praticamente igual ao atrito total.

No estudo de camada-limite tomamos como exemplo o escoamento em torno de uma placa plana, que pode ser considerada como corpo perfilado. As expressões da tensão de cisalhamento, por exemplo, referem-se exclusivamente ao atrito de superfície e não podem ser usadas para calcular o atrito total no escoamento em torno de corpos cegos como os das Figuras 50.3 e 50.7. O atrito total corresponde à força de resistência total, também chamada de *resistência de arrasto ou de perfil* constituída da *resistência de superfície ou de atrito* e da *resistência de forma ou de pressão*.

A resistência de arrasto é usualmente determinada a partir da expressão

$$F_a = C_a A_p (\rho v_0^2 / 2), \quad (50.1)$$

onde F_a representa a força de arrasto, C_a o coeficiente de arrasto, A_p a área projetada ou *seção mestra* do corpo perpendicular à direção do escoamento e $\rho v_0^2 / 2$ a pressão dinâmica. A velocidade v_0 pode representar tanto a velocidade do corpo em relação ao fluido

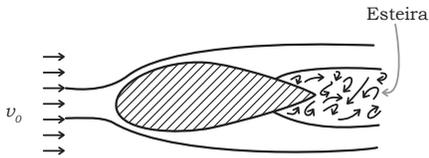


Figura 50.6

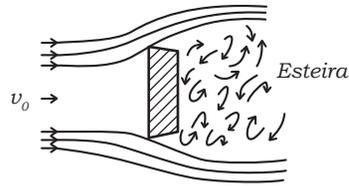


Figura 50.7

em repouso, como a velocidade do fluido fora da zona de influência do corpo em relação ao corpo imóvel. Em ambos os casos, a resistência de arrasto tem o mesmo valor, desde que o corpo ou o fluido estejam animados de um movimento retilíneo uniforme de mesma velocidade v_0 . A seção mestra A_p refere-se à maior área projetada em um plano transversal à direção do escoamento; entretanto, outras áreas do corpo, tal como a área projetada na direção do escoamento, podem ser usadas na equação (50.1), onde o coeficiente C_a passa então a ter outro valor, de tal sorte que $C_a A_p$ seja constante. A equação (50.1) é da mesma forma que a equação (48.29), que definiu o fator de atrito da placa plana. A relação F_a/A_p é equivalente à tensão τ_0 e o coeficiente de arrasto

$$C_a = \frac{F_a/A_p}{\rho v_0^2/2}, \quad (50.2)$$

é equivalente ao fator de atrito da placa f_p .

Tanto a resistência de superfície quanto a resistência de forma que compõem o valor da resistência total F_a dependem principalmente do número de Reynolds. Essa dependência é expressa através do coeficiente de arrasto, i.e., $C_a = f(\text{Re})$ ou, levando em conta que a rugosidade da superfície e o nível de turbulência afetam a localização do ponto de separação, de uma maneira mais geral podemos dizer que $C_a = f(\text{Re}, \text{rugosidade}, \text{nível de turbulência})$. A forma da função f é em geral determinada a partir de dados experimentais, tais como os representados pelas curvas da Figura 50.8. Na Figura 50.8 o coeficiente de arrasto do perfil de cilindros de seção circular é expresso em função do número de Reynolds calculado com o diâmetro D . Podemos comparar os valores de C_a de cilindros infinitamente longos com a de cilindros cuja razão entre o diâmetro e o comprimento é de 1.5.

Consideremos o que ocorre no escoamento em torno de cilindros infinitamente longos conforme aumenta o número de Reynolds, i.e., com o aumento do valor de v_0 para um dado cilindro e fluido:

- a) $\text{Re} < 10^0$. Para baixos valores da velocidade predomina completamente a resistência de superfície e a camada-limite envolve todo o cilindro.
- b) $\text{Re} = 10^1$. Em torno de $\text{Re} = 10^1$ tem início a separação da camada-limite e a formação de redemoinhos, de rotações opostas (Fig. 50.9).
- c) $5 \times 10^1 < \text{Re} < 5 \times 10^3$. Aproximadamente nessa faixa, para um certo valor de Re , a intensidade de rotação dos redemoinhos aumenta com o correr do tempo,

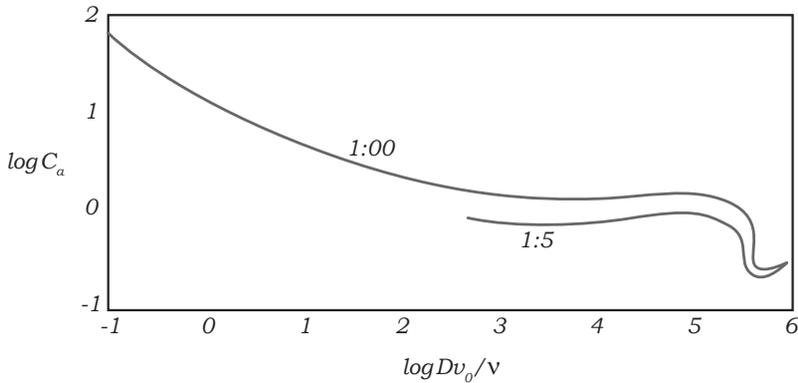


Figura 50.8

tornando-os mais alongados na direção do escoamento (Fig. 50.10) até que um redemoinho de cada vez se desprenda do cilindro (Fig. 50.11) sendo então levado pela corrente. Ao longo de um certo percurso os redemoinhos arrastados conservam sua identidade e formam a chamada esteira de von Kármán, que consiste então de uma fila dupla de vórtices simétricos alternados (Fig. 50.12). A frequência e a liberação dos redemoinhos pode ser expressa de maneira adimensional através do número Strouhal (ver equação 35.13).

$$S_h = nD/v_0. \quad (50.3)$$

No regime de escoamento da esteira de von Kármán o número de Strouhal é função de número de Reynolds.

- d) $Re = 5 \times 10^3$. Em torno de $Re = 5 \times 10^3$ a frequência de liberação dos vórtices é tão rápida que a regularidade da esteira de von Kármán não pode ser mais percebida e ela é considerada turbulenta.
- e) $5 \times 10^3 < Re < 3 \times 10^4$. Aproximadamente entre estes valores do número de Reynolds o coeficiente de arrasto que vinha decrescendo com o aumento do valor de Re passa a aumentar, devido a formação da esteira turbulenta, até cerca de $Re = 3 \times 10^4$.
- f) $3 \times 10^4 < Re < 4 \times 10^5$. Em torno dessa região o coeficiente C_a permanece praticamente independente de Re , de tal sorte que a resistência de perfil é proporcional ao quadrado da velocidade.
- g) $Re = 4 \times 10^5$. Em torno desse valor a camada-limite passa de laminar a turbulenta e o ponto de separação muda-se para o bordo de fuga do cilindro, estreitando a esteira e diminuindo abruptamente o valor de C_a (Fig. 50.13).
- h) $Re > 4 \times 10^5$. Deste ponto em diante a esteira é constituída de turbilhões altamente irregulares.

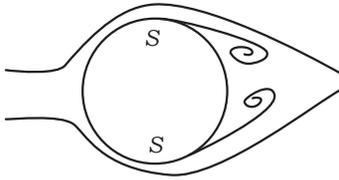


Figura 50.9

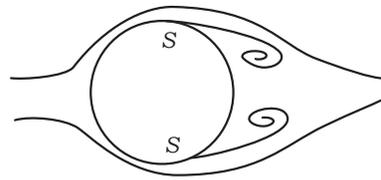


Figura 50.10

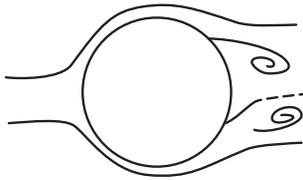


Figura 50.11

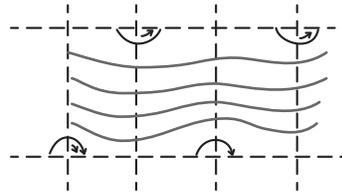


Figura 50.12

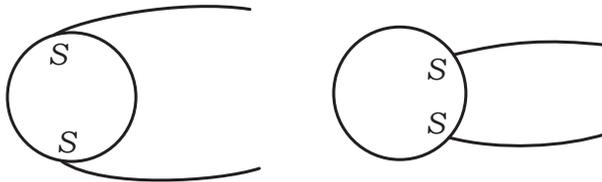


Figura 50.13

No caso de cargas esféricas e para valores muito baixos do número de Reynolds, Stokes conseguiu simplificar as equações de Navier-Stokes, desprezando as forças de inércia e considerando somente as forças viscosas. A solução das equações simplificadas resultantes fornece a seguinte expressão da força de arrasto:

$$F_a = 3\pi\mu v_0 D. \quad (50.4)$$

Essa equação representa bem os dados experimentais até $Re = 1$. Comparando essa expressão com a equação geral (50.1) vemos que o coeficiente de arrasto de esferas no regime de Stokes é dado por

$$C_a = 24/Re, \quad (50.5)$$

que representa uma reta em gráfico log-log. Para valores de Re maiores que 1 ocorre no escoamento em torno de corpos esféricos os mesmos fenômenos observados no escoamento em torno de cilindro infinito. São semelhantes às curvas da Figura 50.8.

Os dados experimentais de C_a representados pelas Figuras 50.8 e A.23 foram obtidos em túneis de vento ou em canais de água. Estes aparatos normalmente operam com

baixo nível de turbulência e os corpos de prova, de modo geral, possuem superfícies lisas. O aumento do nível de turbulência do escoamento e da rugosidade da parede fazem com que a camada-limite passe de laminar a turbulenta em menores números de Reynolds, o que conseqüentemente promove um estreitamento da esteira.

Conservação do escoamento ideal com os dados experimentais

Consideremos o escoamento normal ao eixo de um cilindro de seção circular infinitamente largo. Na Figura 50.14 comparamos as pressões medidas ao longo da semicircunferência superior do cilindro com as calculadas pela equação de Bernoulli. Ao longo da semicircunferência inferior as curvas têm exatamente a mesma configuração. A curva 1 representa o escoamento ideal segundo o qual o fluido escorrega sem resistência pela superfície do cilindro e a pressão no bordo de fuga volta ao valor inicial, não atuando nenhuma força na direção do movimento, i.e., a força de arrasto é nula (Paradoxo de D'Alembert). A curva 2 representa os dados experimentais do escoamento com camada-limite turbulenta (escoamento supercrítico) enquanto a curva 3 representa o escoamento com a camada-limite laminar (escoamento subcrítico). Vemos que as curvas experimentais afastam-se bastante da teórica principalmente no caso do escoamento supercrítico.

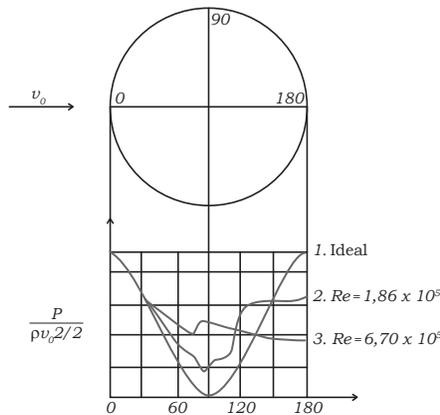


Figura 50.14

As Figuras 50.15 e 50.16 mostram o mesmo tipo de comparação no caso do escoamento em torno de corpos perfilados (*perfis aerodinâmicos*). A concordância entre a teoria e a experiência é mais razoável nesses casos.

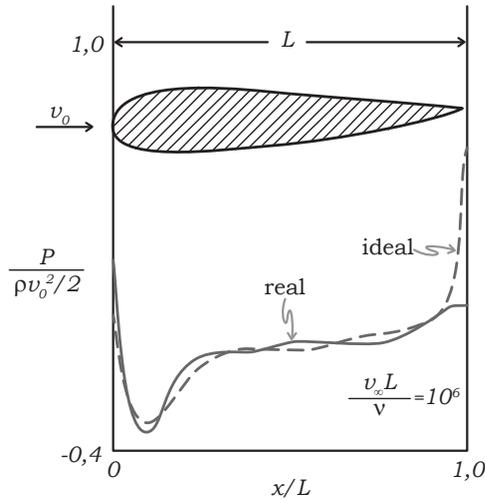


Figura 50.15

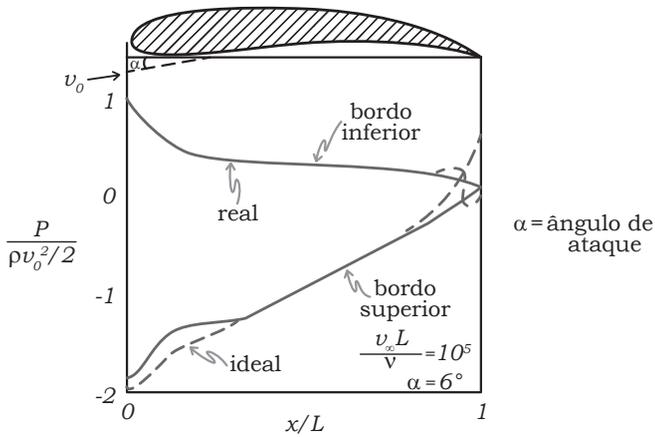


Figura 50.16

Referências

SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 1, 1960.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Applied Hydro and Aeromechanics*, Dover, Capítulo 4, 1957.

BARNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 8, 1957.

Forças de arrasto e sustentação

Em geral, a força total exercida por um fluido em movimento em um corpo imerso pode ser desdobrada em uma componente paralela e outra normal à direção do escoamento principal. A componente paralela é chamada de *força de arrasto*, *força de perfil* ou simplesmente de *arrasto* enquanto a componente perpendicular é a *força de sustentação*, *força de suspensão* ou simplesmente *manutenção* ou *suspensão*. Nos corpos axissimétricos, tais como o cilindro e a esfera, ou o perfil ilustrado na Figura 50.15, a distribuição da pressão é simétrica e, em módulo, a direção da força resultante F_R é igual à força de arrasto F_a . Na Figura 51.1 mostramos a distribuição da pressão em torno de um cilindro circular infinito. Essas pressões podem ser medidas com o auxílio de um certo número de pequenos furos feitos ao longo da superfície de uma seção do cilindro. Mostramos a distribuição da pressão tanto para um escoamento subcrítico como para um escoamento supercrítico. O sinal positivo indica pressão maior e o sinal negativo menor do que a pressão ambiente ou pressão de ataque, P_0 . Vimos anteriormente que a resistência ou força de arrasto pode ser decomposta na resistência ou força de superfície ou atrito e na resistência ou força de forma ou pressão.

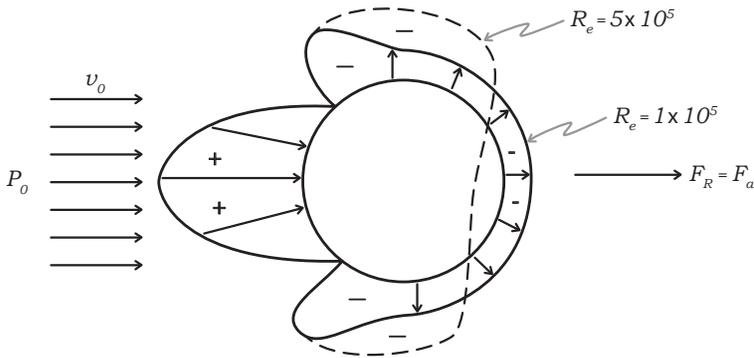


Figura 51.1

Nos corpos assimétricos, tais como os perfis ilustrados nas Figuras 50.16 e 51.2, a força de sustentação F_s é finita pois a força resultante (força total) é inclinada em relação à direção do escoamento incidente ao corpo. Na parte superior do perfil a pressão é menor que a ambiente, enquanto na parte inferior ela é maior. Daí resulta F_R com os componentes de sustentação e arrasto. Uma alteração no ângulo de ataque modifica a

distribuição da pressão em torno do perfil e com isso os módulos, direções e às vezes mesmo os sentidos das forças F_s e F_a .

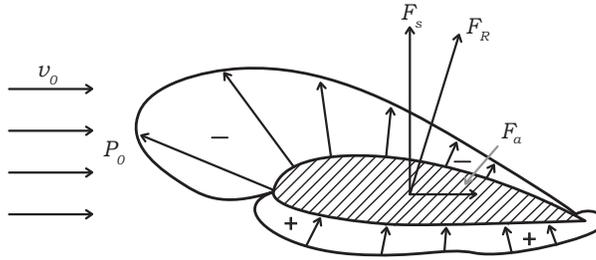


Figura 51.2

A força total em cada elemento de área da superfície de um corpo pode ser desdobrada em dois componentes: um normal e outro tangencial à superfície (Fig. 51.3). Os componentes normais são as forças de pressão e os tangenciais as forças de atrito. A resultante na direção paralela ao escoamento das forças de pressão é a resistência de forma ou de pressão expressa por

$$F_{forma} = \int_A P dA \text{sen } \gamma. \quad (51.1)$$

A resultante na direção paralela ao escoamento das forças de atrito é a resistência de superfície dada por

$$F_{atrito} = \int_A \tau_0 dA \text{cos } \gamma. \quad (51.2)$$

A resistência de arrasto ou perfil é a soma dessas duas resistências, i.e.,

$$F_a = F_{forma} + F_{atrito} = \int_A P dA \text{sen } \gamma + \int_A \tau_0 dA \text{cos } \gamma. \quad (51.3)$$

O valor de cada componente da força de arrasto depende principalmente da forma e da posição do corpo em relação ao escoamento. Tomando como exemplo uma placa plana, se ela é colocada na posição paralela à direção do movimento (ângulo de ataque nulo) a resistência de arrasto F_a é praticamente igual à resistência de atrito e pode ser calculada com boa precisão pelas equações de τ_0 da camada-limite, por exemplo, equação (48.27) ou (49.22). Entretanto, colocando a placa na posição transversal ao escoamento (Fig. 50.7), a resistência de arrasto é quase que inteiramente decorrente da resistência de forma, o que se traduz em uma queda de pressão observável entre os dois lados da placa vertical. Nesse caso o turbilhonamento que se produz na esteira acarreta *dissipação* de energia em calor. Essa dissipação provoca queda de pressão, que se soma à queda provocada pelo estreitamento das linhas de corrente nos bordos superior e inferior da placa.

A força de arrasto é usualmente calculada pela equação (50.1)

$$F_a = C_a A_p (\rho v_0^2 / 2), \quad (50.1)$$

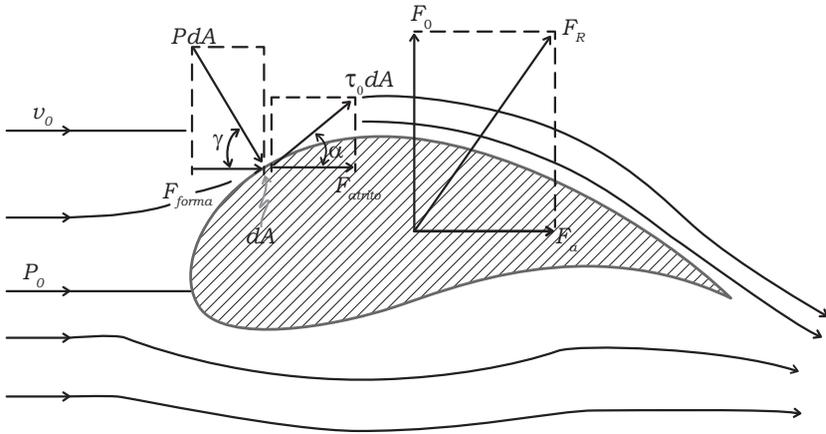


Figura 51.3

onde o valor do coeficiente de arrasto C_a vem de determinações experimentais quando a resistência de forma é atuante ou de expressões analíticas nos poucos casos em que a resistência de arrasto é praticamente igual à resistência de atrito, i.e., quando as equações da camada-limite podem ser resolvidas. Analogamente, a força de sustentação F_s pode ser calculada por

$$F_s = C_s A_p (\rho v_0^2 / 2). \quad (51.4)$$

Do mesmo modo que o coeficiente de arrasto, o coeficiente de sustentação, exceto em poucos casos simples, é determinado a partir de dados experimentais. Nessas duas equações, A_p é uma área de referência que usualmente é a menor área projetada (seção mestra) em um plano paralelo ou em um plano normal à direção do escoamento. No caso do cilindro circular e da esfera, A_p na equação (50.1) foi projetada no plano normal, entretanto no caso de perfis aerodinâmicos, como asas de avião (Fig. 51.4), A_p usualmente representa o produto da *corda* b pela *envergadura* l .

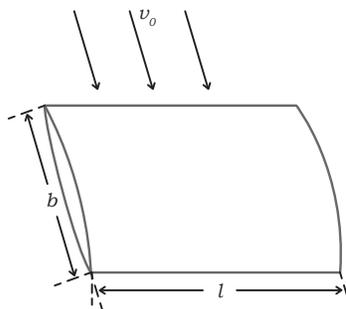


Figura 51.4

Os valores dos coeficientes de arrasto e sustentação podem ser determinados experimentalmente em túneis e tanques de prova. Da força total que atua no corpo de prova podemos separar o arrasto e a sustentação com o auxílio da distribuição da pressão em torno do corpo ou por medida direta das forças com o emprego de balanças. Os valores dos coeficientes dependem do número de Reynolds que usualmente é baseado na velocidade de ataque v e na corda h , i.e.,

$$C_a = \frac{F_a}{A_p(\rho v_0^2/2)}, \quad (51.5)$$

$$C_s = \frac{F_s}{A_p(\rho v_0^2/2)}, \quad (51.6)$$

$$Re = b v_0 / \nu. \quad (51.7)$$

Além disso, C_a e C_s referentes a uma dada forma de corpo depende também do ângulo de ataque α (ângulo entre a corda e a direção do escoamento incidente (Fig. 51.5)). A variação dos coeficientes com o ângulo de ataque representada na Figura 51.6 é típica dos objetos perfilados tais como as asas de avião. Vemos que a força de sustentação aumenta linearmente com o aumento de α até um certo ponto A , passa a aumentar mais lentamente, atinge um máximo no ponto B e finalmente decresce. Por outro lado, a força de arrasto começa por aumentar lentamente com o aumento de α e termina por aumentar mais rapidamente. As curvas típicas da Figura 51.6 são obtidas com asas de envergadura infinita, i.e., asas cuja envergadura é tão extensa que o escoamento pode ser considerado bidimensional ou, em outras palavras, o efeito das pontas é desprezível. Para pequenos valores do ângulo de ataque no trecho em que a força de sustentação aumenta linearmente com o aumento de α a resistência de arrasto é devida em grande parte à resistência de atrito porque o ponto de separação situa-se próximo do bordo de fuga (Fig. 51.7a). Nesta região a configuração do escoamento em torno da asa é quase ideal e irrotacional e o coeficiente de sustentação e portanto a força de sustentação depende principalmente de α e muito pouco do número de Reynolds, i.e., da viscosidade do fluido. Para os maiores valores do ângulo α (além do ponto A da Fig. 51.6) o ponto de separação situa-se mais próximo do bordo de ataque (Fig. 51.7b) e a resistência de forma passa a contribuir mais para a resistência de arrasto. Neste trecho a força de sustentação continua a aumentar, se bem que mais lentamente, com o aumento de α enquanto a resistência de arrasto aumenta mais rapidamente, principalmente por causa do aumento da espessura da esteira. O aumento do ângulo de ataque vai aproximando o ponto de separação do bordo de ataque e aumentando a espessura da esteira até que atingindo o ponto B da Figura 51.6 a força de sustentação atinge seu maior valor e a força de arrasto é também muito grande. Deste ponto crítico em diante a asa perde sustentação, i.e., entra em *estol*.

É importante considerar a distribuição de pressão em torno de outros corpos assimétricos além da asa. As Figuras 51.8 e 51.9 mostram, respectivamente, o caso de um automóvel e o de um prédio.

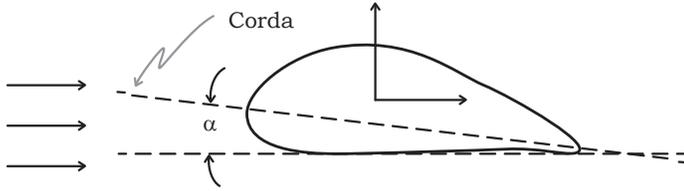


Figura 51.5

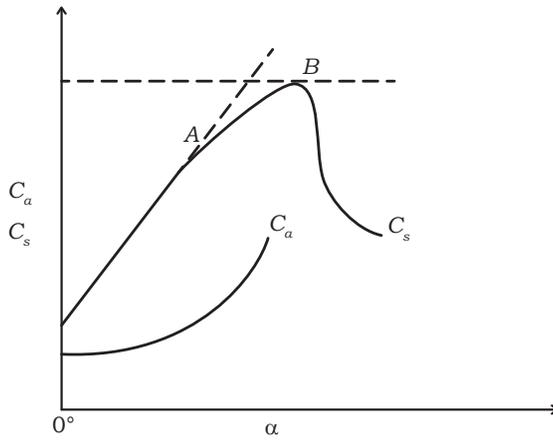


Figura 51.6

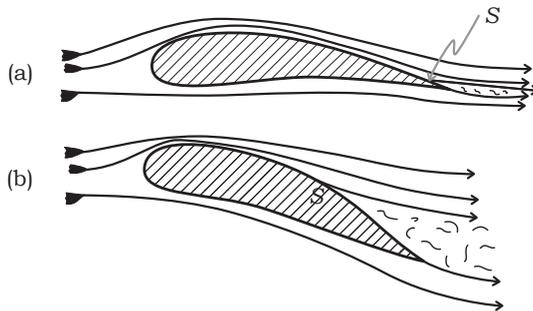


Figura 51.7

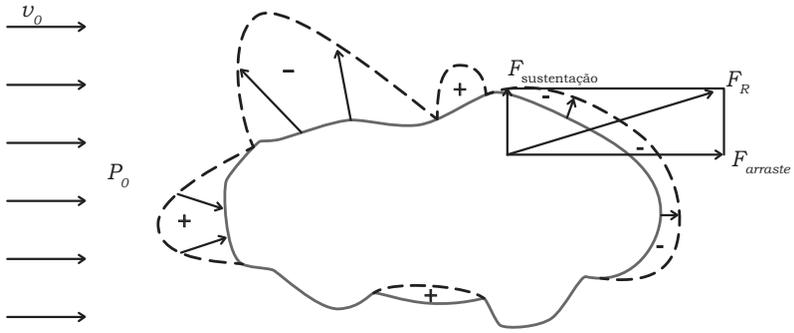


Figura 51.8

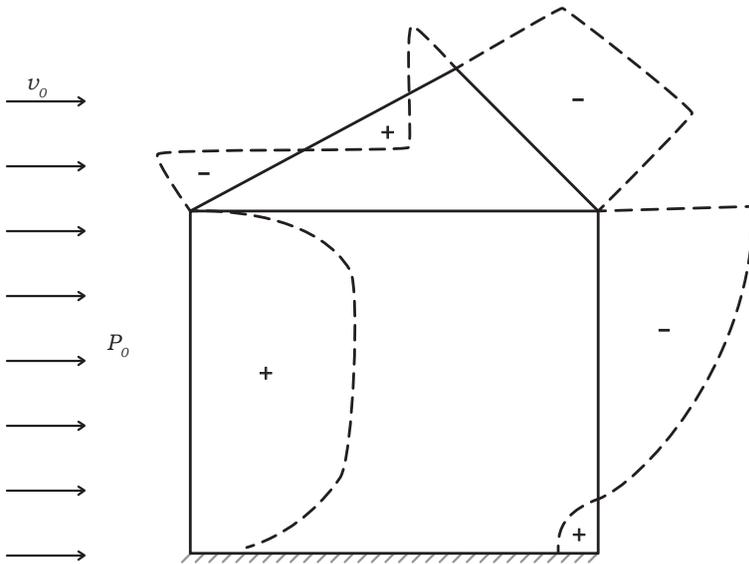


Figura 51.9

Nos corpos perfilados o arrasto devido a dissipação de energia na esteira estreita (Fig. 51.7a) é uma parte importante do arrasto total e tem o nome de arrasto induzido. Para levar em conta o arrasto induzido devemos considerar o escoamento suficientemente afastado do corpo.

No movimento de corpos parcial ou insuficientemente submersos em líquido é necessário levar em conta no valor do arrasto a resistência correspondente a formação de ondas na superfície livre do líquido. Também quando um corpo se move nas proximidades de outro corpo ou de paredes sólidas é necessário levar em conta a força de atração. Finalmente, quando um corpo está animado de um movimento acelerado em relação ao fluido existe uma força de arrasto proporcional à aceleração e, essa força tem o mesmo efeito que o aumento da inércia do corpo.

Referências

BARNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 9, 1957.

PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Capítulo 9, 1961.

LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Capítulo 4, 1959.

GOLDSTEIN, S. (Ed.). *Modern Developments in Fluids Dynamics*, Oxford University Press, Capítulo 1, 1957.

Controle de separação da camada-limite

A separação da camada-limite acarreta a formação de redemoinhos que acabam por ser arrastados pela corrente fluida e sofrer degradação por ação das forças viscosas. A formação, arrastamento e degradação dos redemoinhos em turbilhões dissipa as energias de escoamento transformando-as em calor. Esse consumo de energia é importante no escoamento em difusores, válvulas, curvas e outros acidentes de condutos forçados. Nesses casos, a separação pode ser controlada pelo perfilamento dos obstáculos, arredondamento das curvas e diminuição do ângulo de divergência de alargamentos.

No desenho de aviões e de veículos espaciais em geral, o controle da separação é importante para aumentar a estabilidade do voo, diminuir o consumo de combustível, e permitir que velocidades mais elevadas sejam atingidas. Todos os componentes do veículo devem ter um perfil aerodinâmico para que seja menor a resistência de arrasto. Apesar disso, mesmo em objetos perfilados, ocorre o crescimento da camada-limite que leva à sua separação. O controle da separação é então principalmente o controle do crescimento da camada-limite. Consideremos a seguir uma classificação dos principais métodos de controle.

Movimento da parede do corpo. Por meio deste método procuramos evitar a formação da camada-limite. A velocidade relativa, i.e., a diferença entre a velocidade do fluido e a de parede é responsável pela formação da camada-limite. Portanto, a maneira óbvia de evitar a formação consiste em tornar nula a velocidade relativa, i.e., em fazer com que a parede se mova com a corrente fluida. No caso do cilindro de seção circular a aplicação deste método é relativamente simples. A Figura 52.1 mostra a configuração das linhas de corrente em torno de um cilindro animado de um movimento de rotação. Na parte superior a parede e o fluido movimentam-se no mesmo sentido e a separação é eliminada. Na parte inferior, onde o sentido do movimento do fluido é contrário ao do cilindro, a separação é apenas parcial.

Neste caso, a aceleração do fluido na parte superior e o seu retardamento na parte inferior faz com que a pressão em cima seja menor do que a pressão em baixo, o que produz uma força de sustentação. O aparecimento da sustentação pela rotação do corpo tem o nome de *efeito Magnus*. Se o cilindro não estivesse animado do movimento de rotação a força de sustentação seria nula. Para outros formatos dos corpos a movimentação da parede é mecanicamente complicada e dispendiosa, de modo que este método não teve ainda aplicação.

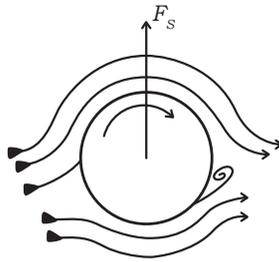


Figura 52.1

Aceleração da camada-limite. Este método consiste em fornecer energia às partículas fluidas que estão sendo retardadas na camada-limite. Essa energia pode provir de um soprador especial colocado no interior do corpo (Fig. 52.2) ou diretamente da corrente fluida através de fendas que ligam a camada-limite retardada a zonas de pressão mais elevadas (Fig. 52.3). A fenda entre a aba (“flap”) e o corpo de asas de avião funciona perto do bordo de fuga, do mesmo modo que a fenda perto do bordo de ataque da Figura 52.3. Esses processos têm sido empregados com sucesso para controlar a separação e aumentar a força de sustentação. A Figura 52.4 é um diagrama polar (C_s locado com C_a) que mostra a influência da fenda frontal e da fenda da aba na sustentação e no arrasto.

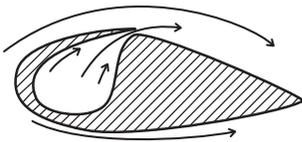


Figura 52.2

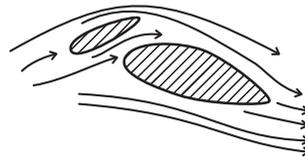


Figura 52.3

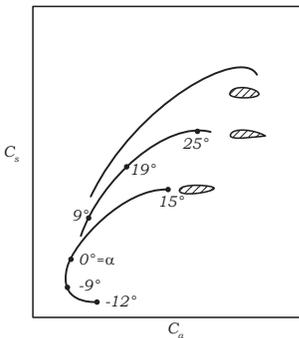


Figura 52.4

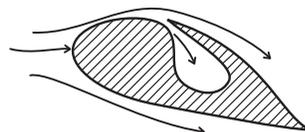


Figura 52.5

Sucção. Por este método o fluido retardado é retirado da camada-limite, através de uma fenda, antes que haja a separação, (Fig. 52.5). A jusante da fenda forma-se uma nova camada-limite capaz de vencer um certo gradiente adverso de pressão. Este método é usado também para reduzir a resistência de arrasto não só por evitar a separação como por deslocar para o bordo de fuga o ponto de transição de camada-limite laminar para turbulenta.

Perfis laminares. Certos formatos retardam a transição do escoamento laminar para o turbulento, desse modo diminuindo a resistência de arrasto. Nos modernos perfis de pequeno arrasto a camada-limite fica sujeita a um gradiente favorável de pressão até próximo do bordo de fuga: esses são chamados de perfis laminares. Na prática a sucção da camada-limite retardada e o emprego de desenhos de baixa resistência de arrasto são os métodos mais usados para combater a separação.

Camada-limite laminar sujeita a um gradiente de pressão

Na camada-limite que se forma na placa plana consideramos constantes a velocidade v_∞ e a pressão P imposta pelo escoamento ideal interior. Com isso, o gradiente $\partial P / \partial x$ ao longo da placa é evidentemente nulo e a equação (47.5) de Prandtl indica que junto à parede ($y = 0$), $\partial^2 v / \partial y^2 = 0$. Este resultado foi empregado como condição de contorno para a determinação das constantes do perfil

$$v = a + by + cy^2 + dy^3. \quad (48.14)$$

Por outro lado, na entrada de tubulações ou ao longo de paredes curvas, tanto a velocidade v_∞ quanto a pressão imposta na camada-limite variam ao longo do escoamento, i.e., $\partial P / \partial x \neq 0$.

Na entrada de dutos (Fig. 46.2) tanto a velocidade v quanto a pressão imposta P são constantes ao longo de uma seção transversal do miolo ideal. Em torno de paredes curvas, entretanto, a velocidade v_∞ e a pressão imposta P variam ao longo de um raio de curvatura (Fig. 50.2). Para simplificar a análise do escoamento em torno das paredes curvas adotamos um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais cujo eixo x segue a direção da parede enquanto o eixo y lhe é perpendicular (Fig. 52.6). Nesse caso, formamos em torno do corpo uma rede que consiste de curvas paralelas à parede e retas perpendiculares às curvas. Admitindo que a curvatura não sofre variações bruscas, podemos considerar constante a velocidade v ao longo de um eixo y , i.e., podemos admitir igual espaçamento entre as curvas paralelas. Com esse sistema de coordenadas as equações de Prandtl da camada-limite (eqs. 47.5, 47.6 e 47.7) podem ser aplicadas ao caso de paredes curvas.

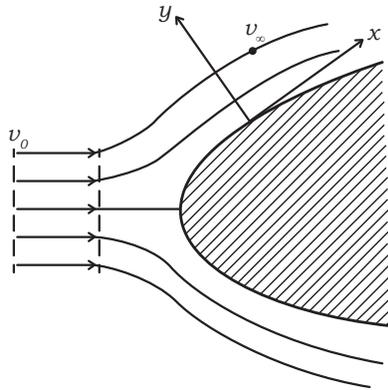


Figura 52.6

Suponhamos então que o perfil da velocidade na camada-limite de uma parede curva é expresso por um polinômio do terceiro grau (eq. 48.14). Essa expressão deve satisfazer as condições limites da placa plana

$$\begin{aligned} y = 0, \quad v &= 0, \\ y = \delta, \quad v &= v_\infty, \\ y = \delta, \quad \partial v / \partial y &= 0, \end{aligned}$$

e ainda a condição que exprime o gradiente finito de pressão, baseada na equação de Prandtl (eq. 47.5) aplicada junto à parede onde $y = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{y=0}. \quad (52.1)$$

Levando em conta o valor de $\partial P / \partial x$ dado pela equação de Bernoulli (eq. 47.4) e lembrando que dentro da camada-limite a pressão P não varia com y nem a velocidade com x , podemos escrever esta última equação do seguinte modo

$$\left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{v} v_\infty \frac{dv_\infty}{dx}. \quad (52.2)$$

Aplicando as quatro condições de contorno ao perfil (eq. 48.14), foram determinados os seguintes valores das quatro constantes,

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= (3/2)(v_\infty / \delta), \\ c &= -(1/2)v_\infty (dv_\infty / dx), \\ d &= -(1/2)(v_\infty / \delta^2). \end{aligned}$$

Portanto, o perfil da velocidade na camada-limite laminar sujeita a um gradiente de pressão é expressa por

$$\frac{v}{v_\infty} = (3/2 + \lambda/2) \frac{y}{\delta} - \lambda \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (52.3)$$

O parâmetro λ é definido por

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dv_\infty}{dx}. \quad (52.4)$$

A tensão de cisalhamento na parede é dada por

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} = \mu \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{v_\infty}{\delta}. \quad (52.5)$$

Substituindo na equação integral de von Kármán (eq. 46.14) o perfil expresso pela equação (52.3) e a tensão pela equação (52.5) e integrando resulta

$$\rho \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{39}{280} - \frac{\lambda}{280} - \frac{\lambda^2}{420} \right) v_\infty^2 \delta \right] + \rho \left(\frac{3}{8} - \frac{\lambda}{24} \right) v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} \delta = \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{v_\infty \mu}{\delta}. \quad (52.6)$$

Substituindo nessa expressão o valor de dv/dx expresso pela equação (52.4) e simplificando temos

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{39}{280} - \frac{\lambda}{280} - \frac{\lambda^2}{420} \right) v_\infty^2 \lambda \right] = \frac{\nu v_\infty}{\delta} \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{12} \right). \quad (52.7)$$

Esta expressão é uma equação derivada total de primeira ordem e *permite calcular a espessura δ da camada-limite* em função da distância x . A integração pode ser efetuada por um método gráfico ou numérico desde que se conheça a variação da velocidade dv_∞/dx ao longo da parede.

Na equação (52.7) o parâmetro λ depende do valor de δ conforme expresso pela equação (52.4). A relação $v - x$ é ditada pelo escoamento ideal exterior à camada-limite.

Varição do perfil da velocidade na camada-limite

O perfil $v - y$ da velocidade na camada-limite sujeita a um gradiente de pressão depende do valor desse gradiente conforme mostram as equações (52.2). O valor de dv_∞/dx pode ser expresso em função do parâmetro λ através da equação que o define (eq. 52.4). Portanto, a variação de curvatura do perfil junto à parede pode ser analisada através das expressões

$$\left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} = -2\lambda \frac{v_\infty}{\delta^2}. \quad (52.8)$$

De acordo com o sinal de dv/dx podemos ter as seguintes possibilidades:

- $dP/dx < 0$. Nesse caso, o perfil é representado pela Figura 52.7a e sua curvatura que deve satisfazer a condição: $y = \delta$, $dv/dy = 0$, é dada pela Figura 52.7b. A

variação da curvatura junto à parede deve obedecer a equação (52.8), i.e., deve ser negativa; portanto, d^2v/dy^2 deve ser negativo ao longo de toda espessura da camada-limite, pois quando $y = \delta$, $d^2v/dy^2 = 0$ (Fig. 52.7c). O valor de λ segundo a equação (52.8) deve ser positivo.

- b) $dP/dx > 0$. Nesse caso de gradiente adverso de pressão o perfil pode ser representado pela equação (52.8a) e a sua curvatura pela Figura 52.8b. Vemos que existe um ponto de inflexão (P.I.) onde a derivada segunda é nula. A equação (52.8) indica que a variação da curvatura deve ser positiva junto à parede e a condição de contorno em $y = \delta$ exige que a derivada segunda seja novamente nula nesse ponto. Portanto, a variação da curvatura deve ser expressa como mostra a Figura 52.8c. O valor de λ de acordo com a equação (52.8) deve ser negativo.

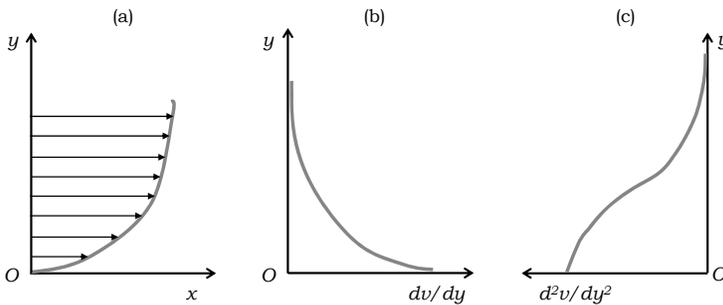


Figura 52.7

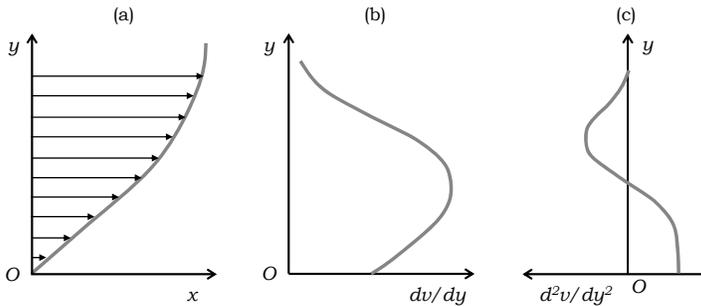


Figura 52.8

Ponto de separação

No ponto de separação o gradiente da velocidade junto à parede é nulo, i.e., $(dv/dy)_{y=0} = 0$. De acordo com a equação (52.5), quando a curvatura do perfil da parede é nula, temos

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{v_\infty}{\delta} = 0. \quad (52.9)$$

Portanto, como v_∞ e δ não são nulos, a um valor de $\lambda = -3$ corresponde o ponto de separação. Para maiores valores negativos de λ , $(dv/dy) < 0$ haverá reversão do escoamento junto à parede. Vemos que o valor de λ determina o perfil da velocidade e por isso é chamado de *parâmetro de forma*.

As equações da camada-limite só podem ser aplicadas ao escoamento a montante do ponto de separação. Se esse escoamento é laminar o crescimento da camada-limite pode ser calculado pela equação 52.7 e esses cálculos determinam também o valor do parâmetro de forma λ . Verifica-se que λ tem um valor positivo nas proximidades do ponto de estagnação do bordo de ataque, passa a ter um valor nulo no local onde $dP/dx = 0$ e daí um valor negativo na região onde a pressão aumenta na direção do escoamento. Quando o parâmetro de forma atinge um valor -3 a camada-limite laminar separa-se da parede. Neste ponto a espessura da camada-limite pode ser colocada pela equação (52.7) colocando $\lambda = -3$.

Cilindro

A teoria hidrodinâmica indica que no escoamento ideal em torno de um cilindro de seção circular a relação $v_\infty - x$ na superfície do cilindro é expressa por

$$v_\infty = 2v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{D}\right), \quad (52.10)$$

onde v_0 é a velocidade constante de ataque, x a distância a partir do ponto de estagnação do bordo de ataque e D é o diâmetro do cilindro. Nas vizinhanças do ponto de estagnação o seno pode ser substituído pelo ângulo, portanto,

$$v_\infty = 4v_0(x/D). \quad (52.11)$$

Com essas relações, podemos então calcular o crescimento da camada-limite até o ponto de separação empregando para isso a equação (52.7). Aplicando a equação de Bernoulli entre um ponto no escoamento incidente onde a velocidade é v_0 e a pressão P_0 , e um ponto no escoamento deformado pela presença do corpo, onde a velocidade é v e a pressão é P , resulta

$$P = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} \left[1 - 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{D}\right) \right]. \quad (52.12)$$

Referências

- ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.M. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., Capítulos 6 e 7, 1959.
- SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co., Capítulos 7 e 13, 1960.
- GOLDSTEIN, S. (Ed.). *Modern Developments in Fluids Dynamics*, Oxford University Press, Capítulo 12, 1957.

Circulação da velocidade

O conceito de circulação de velocidade no escoamento de fluidos é muito útil para o estudo matemático da sustentação de corpos e da teoria geral de corpos perfilados, tais como asas e pás ou palhetas de bombas, turbinas, sopradoras, compressores rotativos. Consideremos como na Figura 53.1 uma trajetória fechada traçada em um dado instante na superfície de área S de um volume de controle de um fluido em escoamento. Este escoamento está configurado por diversas linhas de corrente ψ que cortam a trajetória fechada. A circulação Γ é definida como a integral de linha do vetor velocidade em torno da trajetória fechada, i.e.,

$$\Gamma = \oint_L v \cos \alpha dL, \tag{53.1}$$

onde $v \cos \alpha$ é o componente tangencial da velocidade \vec{v} no segmento infinitesimal de comprimento dL da trajetória. As unidades da circulação são dadas, como exemplo, por m^2/seg e o seu sentido positivo (indicado na Fig. 53.1) segue a regra da mão direita em relação ao vetor $\vec{\delta S}$ representativo da área de superfície do volume de controle. Por outro lado, podemos usar a definição do produto escalar para definir a circulação da velocidade por

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{L}. \tag{53.2}$$

De um modo geral, a integral de linha de qualquer função contínua \vec{f} de um campo vetorial, entre os pontos A e B de uma curva traçada nesse campo, é definida por $\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{L}$. Quando a curva é traçada em um campo de forças, a integral de linha define o trabalho $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{L}$, i.e., o produto do deslocamento pela força no sentido do deslocamento. Quando a curva é fechada e a função é a velocidade \vec{v} , a integral de linha define a circulação da velocidade (eq. 53.2).

Decompondo os vetores velocidade e o deslocamento segundo os eixos cartesianos (x, y, z) , podemos também definir a circulação pela expressão

$$\Gamma = \oint_L (v_x dx + v_y dy + v_z dz). \tag{53.3}$$

A trajetória traçada no fluido em escoamento para a definição da circulação da velocidade é na realidade uma *linha fluido*, i.e., uma linha constituída de partículas do fluido.

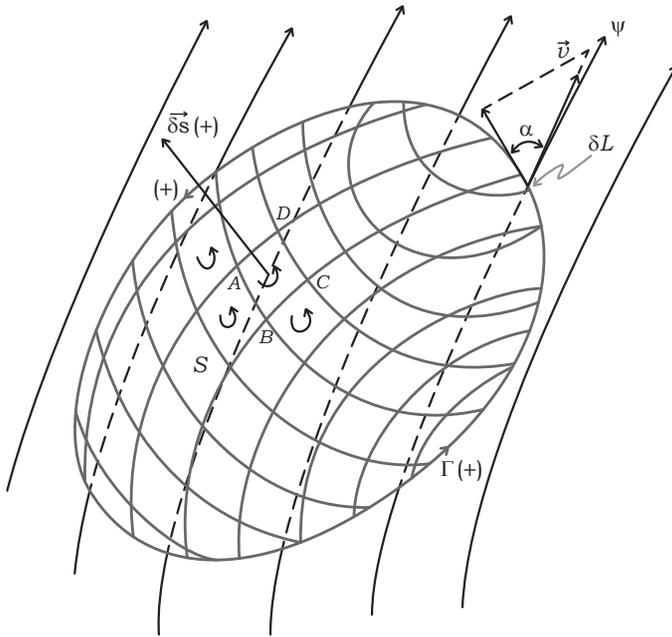


Figura 53.1

Transformação da integral de linha em integral na área

Consideremos um elemento retangular de área no plano (x, y) de escoamento bidimensional (Fig. 53.2). Aplicando a equação (53.2) à trajetória fechada de $A'B'C'D'A'$, que no limite circunda a área infinitesimal $dS = dxdy$, temos

$$d\Gamma = v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx - v_y dy. \quad (53.4)$$

Uma vez simplificada essa equação, resulta

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dxdy. \quad (53.5)$$

Tal como fizemos na Figura 53.1, podemos dividir uma superfície qualquer S , circundada por uma trajetória fechada, em um certo número de pequenas áreas δS . É evidente que as somas das circulações em torno dessas pequenas áreas é igual à circulação na trajetória envoltória porque, tendo em vista que todas as linhas interiores são percorridas duas vezes em sentidos contrários, a circulação interior é nula. Segue-se que considerando a projeção da área S no plano (x, y) , a circulação na curva envoltória pode ser calculada pela expressão

$$\Gamma = \oint_L (v_x dx + v_y dy) = \oint_S \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dxdy. \quad (53.6)$$

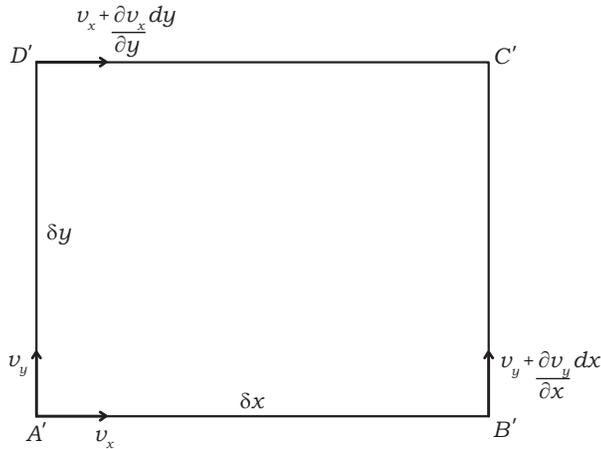


Figura 53.2

Esta equação relaciona uma integral de linha com uma integral de área e fornece mais uma definição da circulação da velocidade.

Considerando as três projeções de superfície S qualquer nos três planos cartesianos normais aos eixos (x, y, z) , podemos definir a circulação na linha de contorno de S pela expressão

$$\Gamma = \oint_S \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy + \oint_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy dx + \oint_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dx dz. \quad (53.7)$$

Esta expressão representa o *Teorema de Stokes* no caso em que a função contínua é a velocidade.

Relação entre circulação e rotação

Existe uma íntima relação entre a circulação de velocidade em torno de uma curva fechada traçada no fluido em escoamento e a rotação do fluido. Essa relação pode ser vista imediatamente pelas equações precedentes. Assim, na equação (53.5) o termo entre parênteses representa o dobro do componente x da rotação do fluido, conforme foi definido pela equação (15.5) e, portanto, aquela equação pode ser expressa por

$$\frac{d\Gamma}{dS_2} = 2\omega_z = T_z, \quad (53.8)$$

onde dS_2 representa a área $dx dy$ projetada no plano perpendicular ao eixo z , ω_z é a rotação em torno desse eixo de rotação e T_z é o componente z do vetor turbilhão definido pela equação (15.22). Vemos, então, que a rotação ou o turbilhão do movimento pode ser considerado como a variação da circulação da velocidade em torno de uma área, i.e., enquanto o turbilhão mede a intensidade local de rotação do fluido em movimento, a circulação em torno de uma região finita de fluido indica a rotação total da região.

Considerando o escoamento tridimensional, a equação (53.7) pode ser expressa por

$$\frac{\Gamma}{2} = \oint_S \omega_z dx dy + \oint_S \omega_x dy dz + \oint_S \omega_y dx dz, \quad (53.9)$$

onde ω_x , ω_y e ω_z são os componentes cartesianos do vetor rotação definidos pelas equações (15.5) a (15.7). Chamando de ℓ , m e n os cossenos diretores da normal a uma pequena área δS (Fig. 53.1), podemos escrever a equação (53.9) do seguinte modo

$$\Gamma = 2 \oint_S (\ell \omega_x + m \omega_y + n \omega_z) dS. \quad (53.10)$$

Chamando de ω_n o componente da rotação em relação à normal da superfície, temos

$$\Gamma = 2 \oint_S \omega_n dS = \oint_S T_n dS, \quad (53.11)$$

onde T_n é corresponde à componente normal do vetor vorticidade.

Podemos agora tirar algumas conclusões gerais concernentes à circulação e à rotação. Quando o escoamento é irrotacional, as equações (15.8) e (15.10) mostram que o lado direito da equação (53.7) (ou da equação (53.9)) é nulo, i.e., a circulação da velocidade é nula em torno de qualquer trajetória fechada traçada no campo do movimento. Por outro lado, se a circulação em torno de todas as curvas fechadas é nula, o escoamento é forçosamente irrotacional. Essas conclusões são válidas desde que o contorno não inclua um ponto singular, i.e., desde que a velocidade seja uma função contínua da posição do campo de escoamento.

Representação vetorial da circulação

A equação (53.2) definiu a circulação como a integral de linha do produto escalar da velocidade pelo deslocamento ao longo de um contorno fechado. Aplicando o teorema de Stokes podemos exprimir a circulação por

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{L} = \oint_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{s}. \quad (53.12)$$

O operador rotacional $\text{rot } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$ foi definido pela equação (15.21) em função dos componentes cartesianos de v .

Assim como definimos a linha de corrente como uma linha que é sempre tangente ao vetor velocidade, continuamos a chamar de *linha de turbilhão* ou *linha de vorticidade* a linha que em todos os seus pontos são tangentes ao vetor turbilhão ou vetor vorticidade \vec{T} . Deste modo temos também o *tubo de turbilhão* ou *tubo de vorticidade* que é limitado pelas linhas de turbilhão que passam por uma curva fechada traçada no fluido em escoamento rotacional. O tubo de vórtice é então análogo ao tubo de corrente, i.e., podemos dizer que o fluxo de vorticidade permanece constante ao longo do tubo de vorticidade. A equação (53.12) mostra que o fluxo de vorticidade ao longo do tubo de vorticidade é igual à circulação da velocidade em torno de uma curva fechada que circunda o tubo.

Conservação da circulação

Provaremos a seguir que, em um fluido ideal, a circulação da velocidade em torno de um contorno fechado traçado no fluido em movimento é constante em relação ao tempo (Teorema de Kelvin), i.e.,

$$D\left(\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{L}\right)/Dt = 0.$$

Consideremos um contorno traçado no fluido em um dado instante. Este contorno é constituído de partículas que no correr do tempo se movimentam, acarretando o movimento do contorno. O nosso objetivo é determinar a variação com o tempo da circulação em torno de um contorno que se movimenta no campo, i.e., calcular a derivada substantiva $D\Gamma/Dt$. O deslocamento dL ao longo do contorno é igual à diferença $d\vec{r}$ entre os vetores posição das pontas do elemento dL .

Derivando a equação (53.12) em relação ao tempo, levado em conta que tanto a velocidade quanto também a forma de contorno podem variar, temos

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_L \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \oint_L \vec{v} \cdot \frac{Dd\vec{r}}{Dt}. \quad (53.13)$$

A velocidade \vec{v} é a derivada em relação ao tempo do vetor \vec{r} , portanto, nesta expressão

$$\vec{v} \frac{Dd\vec{r}}{Dt} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}v^2\right). \quad (53.14)$$

A integral ao longo de um circuito fechado de um diferencial total é nula, portanto, na equação (53.13) é nulo o segundo termo do segundo membro, i.e., $\oint_L d(v^2/2) = 0$. Segue-se que a equação (53.13) reduz-se a

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_L \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r}. \quad (53.15)$$

Nesta equação a aceleração substantiva $D\vec{v}/Dt$ pode ser expressa pela equação de Euler, equação (11.9)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{grad}\Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad}P, \quad (11.9)$$

onde Ω é o potencial do campo gravitacional. Portanto, a equação (53.15) pode ser escrita

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_L \left(\text{grad}\Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad}P \right) d\vec{r}. \quad (53.16)$$

De acordo com o teorema de Stokes expresso pela equação (53.12), o segundo membro da equação (53.16) é dado por

$$\oint_L \left(\text{grad}\Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad}P \right) d\vec{r} = \oint_S \text{rot} \left(\text{grad}\Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad}P \right) d\vec{s}. \quad (53.17)$$

Sabemos entretanto que o rotacional do gradiente de uma função é nulo, portanto, se o escoamento é homogêneo, i.e., se a massa específica ρ só depende da pressão P e o segundo membro da equação também é nulo, temos

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (53.18)$$

ou seja, como $d\vec{r} = d\vec{L}$,

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{L} = C^{te}. \quad (53.19)$$

Esta é a expressão do teorema de Kelvin que queríamos demonstrar.

Como consequência do teorema de Kelvin e da relação entre circulação e rotação podemos concluir um escoamento ideal, homogêneo e irrotacional permanecerá sempre irrotacional com o decorrer do tempo. Este fato pode ser explicado porque as forças de pressão e de campo não podem atuar tangencialmente para modificar o “estado” de rotação. No caso de escoamento real, como ocorre por exemplo na camada-limite junto a paredes sólidas, ou como ocorre também nas proximidades de descontinuidades de velocidade (mesmo no escoamento ideal), o estado de rotação pode ser alterado. Entretanto, o teorema de Kelvin pode ser estendido ao escoamento real (viscoso), desde que nenhum turbilhão cruze a linha fluida em torno da qual a circulação é definida.

É importante observar que o teorema de Kelvin inclui as restrições de fluido homogêneo e de campo de forças conservativas, tal como o campo gravitacional.

Referências

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Capítulo 11, 1947.

FRANKLIN, N.L.; CASE, F.H. *Chemical Engineering Practice*. In: CREMER, H.M.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworths Scientific Publications*, vol. 4, Capítulo 9, 1959.

LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Capítulo 1, 1959.

Exemplos de cálculo da circulação

Circulação em um circuito retangular de um escoamento cisalhante

Consideremos a circulação no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio no circuito retangular $ABCD$ da Figura 54.1. Admitamos que no instante considerado os componentes da velocidade são expressos por

$$v_x = ky, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0, \tag{54.1}$$

i.e., o escoamento é uniforme e o gradiente de velocidade é linear. A circulação pode ser calculada pela alocação da equação (53.2), i.e.,

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{L} = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{L} + \int_{BC} \vec{v} \cdot d\vec{L} + \int_{CD} \vec{v} \cdot d\vec{L} + \int_{DA} \vec{v} \cdot d\vec{L}. \tag{54.2}$$

Nesta expressão, $\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{L} = \int_{AB} v_x \cos \alpha dL$ é nulo porque em $y = 0$, junto à parede, v_x é nulo. As integrais ao longo de BC e DA também são nulas porque $v_y = 0$. Temos ainda que $v_x = k\delta$, $\cos \alpha = -1$ e $\int_{CD} d\vec{L} = b$. Logo,

$$\Gamma = -kb\delta = -CS, \tag{54.3}$$

i.e., a circulação é finita e proporcional à área δb do circuito.

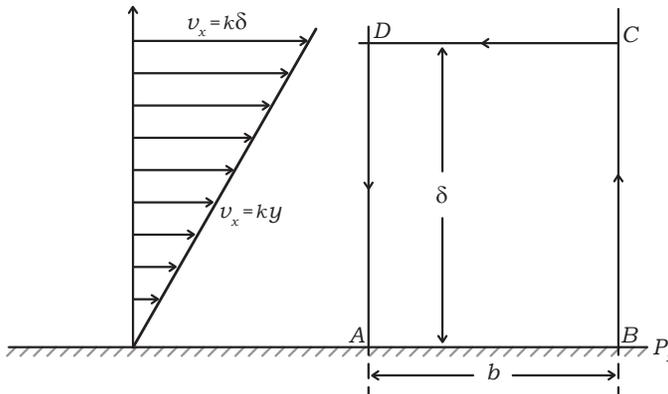


Figura 54.1

Circulação em trajetórias circulares (vórtices)

No caso do *vórtice livre* (vórtice potencial) a velocidade v do fluido em um círculo de raio r é expressa pela equação (17.13), i.e.,

$$vr = \mathcal{C}^{te}. \quad (17.13)$$

Portanto, a circulação $\int_L v \cos \alpha dL$ é dada por

$$\Gamma = 2\pi r v = \mathcal{C}^{te}, \quad (54.4)$$

e é frequentemente chamada de *força de vórtice*. Vemos que apesar do vórtice livre ser um tipo de escoamento irrotacional, a circulação é finita porque a trajetória considerada inclui um ponto singular, que é o centro do vórtice onde a velocidade é infinita. A circulação em torno de uma trajetória que não inclui o centro do vórtice é entretanto nula. Verificamos isso considerando a trajetória $ABCD A$ na Figura 50.2.

No caso de *vórtice forçado*, que é um exemplo típico de escoamento ideal rotacional, a velocidade do fluido é expressa pela equação (17.9), i.e.,

$$v/r = \omega = \mathcal{C}^{te}, \quad (17.9)$$

onde ω é a velocidade angular das partículas fluidas sujeitas ao escoamento circular. Neste caso, a circulação é dada por

$$\Gamma = 2\pi r v = 2\pi r^2 \omega. \quad (54.5)$$

Esta expressão mostra que a circulação em um vórtice forçado é igual ao dobro do produto da velocidade angular pela área do círculo.

No caso do vórtice de fluidos viscosos, o escoamento pode ser considerado irrotacional exceto no miolo em torno do centro, onde o atrito viscoso é importante e o fluido gira como um corpo sólido (Fig. 17.4). No centro então a circulação deve ser calculada pela equação (54.5).

Circulação e sustentação

No estudo das forças de arrasto e sustentação vimos que quando a configuração do escoamento em torno de um corpo é simétrica, a força total ou força semelhante é igual à força de arrasto, i.e., a sustentação é nula. Isto é verdadeiro porque a distribuição da pressão em torno do corpo é simétrica (Fig. 50.2). Vimos, também, no estudo do controle da separação da camada-limite que a rotação de um cilindro (Fig. 52.1) provoca uma distorção da configuração simétrica original e conseqüentemente a modificação da distribuição da pressão e produção da força sustentação, i.e., da força perpendicular à direção do escoamento incidente (efeito Magnus). A nova configuração distorcida (Fig. 54.2a) pode ser determinada por superposição de duas configurações de escoamento ideal irrotacional, i.e., pela soma vetorial das velocidades do escoamento paralelo (Fig.

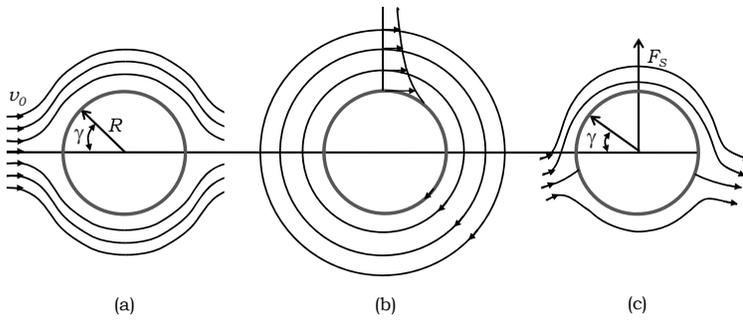


Figura 54.2

54.2a), com as do escoamento circular (vórtice livre) (Fig. 54.2b). Neste último escoamento uma linha de corrente circular, onde a velocidade é igual à velocidade periférica do cilindro rotativo, substitui para todos os efeitos este cilindro.

Com o auxílio dessa superposição dos dois escoamentos ideais podemos mostrar que a circulação Γ tem uma estreita relação com a sustentação F_s mesmo quando a rotação do cilindro imerso em uma corrente é nula.

A velocidade em qualquer ponto na superfície do cilindro imóvel sujeito ao escoamento paralelo puro é expressa pela equação (52.10), onde agora representamos v_∞ simplesmente por v e $2x/D$ pelo ângulo γ , i.e.

$$v = 2v_0 \text{sen } \gamma. \quad (54.6)$$

Por outro lado, a velocidade no círculo equivalente à superfície do cilindro imóvel sujeito ao vórtice livre pode ser expressa em função da circulação com o auxílio da equação (54.4), i.e.

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi R}, \quad (54.7)$$

onde R é o raio do cilindro circular.

A superposição dos dois escoamentos puros, i.e., a soma vetorial das velocidades dos escoamentos componentes em cada ponto fornece a velocidade na superfície do cilindro:

$$v = 2v_0 \text{sen } \gamma + \frac{\Gamma}{2\pi R}. \quad (54.8)$$

Portanto, com esta expressão, mostramos que a configuração da velocidade em torno do cilindro circular de fato depende da circulação Γ . Mostramos a seguir, pela explicação da equação de Bernoulli, que a configuração da pressão está ligada à circulação. No escoamento incidente suficientemente afastado do cilindro a velocidade é v_0 e a pressão P_0 . Aplicando a equação de Bernoulli entre um ponto qualquer a montante e um outro ponto na superfície do cilindro onde a pressão é P e a velocidade é v expressa pela equação (54.8), temos

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho \left[v_0^2 - \left(2v_0 \sin \gamma + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right]. \quad (54.9)$$

De posse dessa expressão que fornece a distribuição da pressão na superfície do cilindro, podemos calcular a força de sustentação F_s que é dada por

$$F_s = \int_0^{2\pi} PR \sin \gamma d\gamma. \quad (54.10)$$

Esta força atua transversalmente a um elemento de área da superfície do cilindro por unidade de comprimento. Substituindo o valor do P nesta última equação, temos

$$F_s = \int_0^{2\pi} \left\{ P_0 + \frac{1}{2}\rho \left[v_0^2 - \left(2v_0 \sin \gamma + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] \right\} R \sin \gamma d\gamma. \quad (54.11)$$

Nesta expressão $\int_0^{2\pi} \sin \gamma d\gamma = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^3 \gamma d\gamma = 0$ e $\int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma d\gamma = \pi$ portanto,

$$F_s = -\rho v_0 \Gamma. \quad (54.11)$$

Esta relação é conhecida com o nome de *equação de Kutta-Zhukovskii* e pode ser considerada como uma expressão de um teorema que vale para cilindros de qualquer formato imerso em um escoamento ideal, irrotacional, incompressível e bidimensional. Segundo esse teorema, a combinação da translação com o vórtice produz uma força transversal diretamente proporcional ao produto da velocidade incidente pela circulação (força do vórtice). Na Figura 54.2c a circulação da velocidade é negativa e a velocidade v_0 é positiva, portanto, a força de sustentação é positiva.

Aplicando a expressão da velocidade resultante na superfície do cilindro, equação 54.8, aos pontos de estagnação, onde $v = 0$, temos

$$(\sin \theta)_{v=0} = -\frac{\Gamma}{4\pi R v_0}. \quad (54.12)$$

Portanto, a localização dos pontos de estagnação depende da razão entre a circulação e a velocidade de translação v_0 . Podemos ter os seguintes casos:

- (a) $\Gamma < 4\pi R v_0$. Neste caso, existem dois pontos no círculo representativo da superfície do cilindro onde a velocidade é nula (Fig. 54.2c).
- (b) $\Gamma = 4\pi R v_0$. Neste caso os dois pontos coincidem em $\gamma - \pi/2$ (Fig. 54.2a) e a velocidade em $\gamma = \pi/2$ é igual a $4v_0$.
- (c) $\Gamma > 4\pi R v_0$. Neste caso a velocidade na superfície do cilindro segue a direção correspondente à circulação e o ponto de estagnação desloca-se para baixo ao longo da linha BD conforme aumenta o valor da circulação (Fig. 54.2b).

Em qualquer dos casos, o efeito da circulação é aumentar a velocidade e, portanto, diminuir a pressão em cima do cilindro e portanto aumentar a pressão embaixo do cilindro. Conseqüentemente isso resulta em um aumento de sustentação do cilindro.

As equações (54.6) a (54.12) valem para o escoamento ideal segundo o qual a velocidade na superfície do cilindro rotativo é finita e igual à velocidade periférica e, portanto, a força de arrasto é nula.

Referências

GOLDSTEIN, S. (Ed.). *Modern Developments in Fluids Dynamics*, Oxford University Press, Capítulo 1, 1957.

DUNCAN, W.J.; THOM, A.S.; YOUNG, A.D. *An Elementary Treatise on the Mechanics of Fluids*, Edward Arnold, Capítulos 2 e 11, 1960.

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 11, 1947.

BARNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 9, 1957.

Teoria de asa de envergadura infinita

A equação de Kutta-Zhukovskii, que foi deduzida para o caso particular do cilindro circular rotativo, pode ser aplicada a corpos de outros formatos. O estudo da sustentação de corpos perfilados em geral ou, especificamente, de asas de avião é de grande importância prática. Como o efeito das extremidades altera a configuração do escoamento, a equação de Kutta-Zhukovskii deduzida para o cilindro infinito deve ser aplicada a asas de envergaduras infinitas, i.e., o escoamento deve ser bidimensional. Cilindros ou asas colocadas transversalmente ao escoamento e confinados entre paredes paralelas em seções de teste de túneis de vento comportam-se como corpos infinitos.

Aplicação da equação de Kutta-Zhukovskii ao escoamento viscoso

Apesar da equação (54.11) ter sido deduzida para um escoamento ideal irrotacional, os resultados experimentais obtidos com modelos de asas colocadas em túneis de vento provaram que é boa a concordância entre a teoria e a prática, desde que o ângulo de ataque do escoamento em relação à corda da asa seja relativamente pequeno. Em geral, a equação de Kutta-Zhukovskii fornece valores de sustentação que são mais altos do que os observados e este desvio aumenta com o aumento do ângulo de ataque. A teoria não leva em conta a atuação das forças viscosas, i.e., despreza a resistência da camada-limite e da esteira; daí a discrepância entre a observação e a teoria. Como a teoria não leva em conta a força de arrasto, podemos concluir também que a discrepância será tanto maior quanto maior for a razão entre a sustentação e o arrasto.

Produção de circulação

No caso do cilindro, a circulação é produzida por seu movimento rotativo, que transmite-se ao fluido real pela ação da viscosidade. O entorno de uma asa, entretanto, não está sujeito a uma rotação própria, a produção da circulação é atribuída à produção de um *vórtice inicial*.

Quando uma asa partindo do repouso é posta em movimento, a corrente fluida separa-se no bordo de ataque e encontra-se outra vez no bordo de fuga. Logo no início da translação da asa o encontro das correntes separadas produz um vórtice, porque a velocidade do fluido que percorre a parte inferior da asa é maior do que a da parte superior (Fig. 55.1). Este é o chamado vórtice inicial. Após o início do movimento da asa o escoamento ajusta-se rapidamente, de modo que as duas correntes fluidas atingem

igual velocidade e não há mais produção de vórtices. O vórtice inicial solta-se da asa logo que esta inicia sua translação.

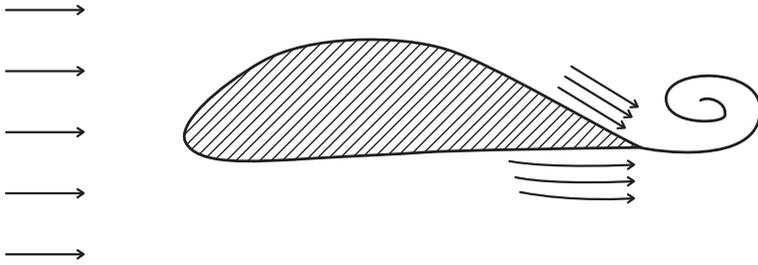


Figura 55.1

Vejamos a aplicação do teorema de Kelvin a esses fenômenos iniciais transitórios. Este teorema diz que a circulação em uma trajetória fechada, constituída sempre das mesmas partículas fluidas, é independente do tempo. Ora, a asa partiu do repouso quando evidentemente a circulação é nula. O teorema de Kelvin diz que a circulação em torno da asa tem que permanecer nula com o correr do tempo (Fig. 55.2); no entanto, logo que a asa inicia seu movimento de translação ocorre a formação de um vórtice inicial, no bordo de fuga, cuja força finita é expressa pela circulação Γ . Esta circulação local não viola o teorema de Kelvin porque a trajetória é fechada C (Fig. 55.3) e inclui uma descontinuidade de velocidade. Se tomarmos entretanto um contorno B fixo em relação à asa, a circulação nesse contorno será evidentemente de igual valor mas de sinal contrário ao da circulação no contorno que inclui o vórtice inicial, i.e., a circulação no contorno A que inclui os dois B e C permanece sempre nula.

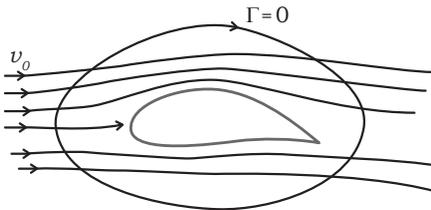


Figura 55.2

Em seguida à partida, o vórtice inicial solta-se do bordo de fuga (Fig. 55.4) e, pela ação da viscosidade, mistura-se com o fluido, perdendo sua identidade e transformando sua energia em calor (atrito induzido). Permanece, entretanto, a circulação em torno da asa, que avança através do fluido. Esta circulação é a responsável pela produção da sustentação expressa pela equação de Kutta-Zhukovskii.

Manutenção da circulação

Vimos que a circulação em torno da asa é produzida pelo vórtice inicial. Depois de um intervalo de tempo relativamente curto o vórtice inicial solta-se e afasta-se, de tal sorte

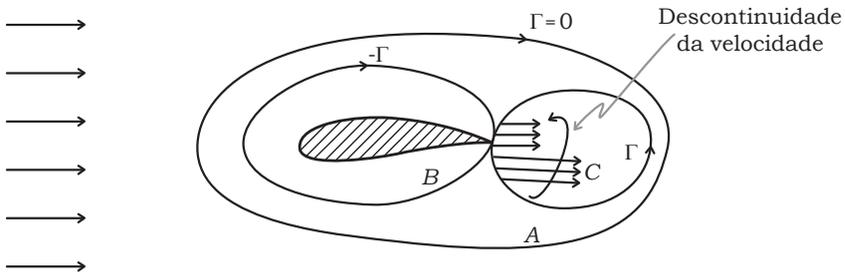


Figura 55.3

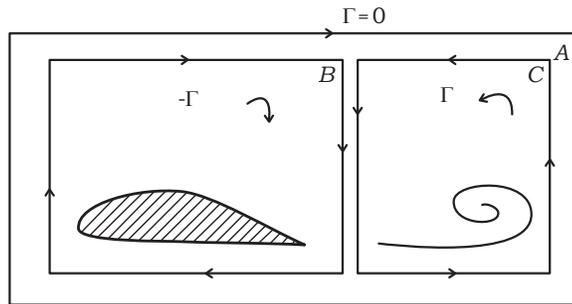


Figura 55.4

que deixe de afetar a circulação em torno da asa, que passa a ser mantida pela camada-limite conforme mostramos a seguir. Consideremos a circulação em torno da envoltória $ABCD$ traçada na camada-limite onde admitimos, para simplificar, que o gradiente de velocidade é linear (Fig. 54.1). A equação (54.3) mostra que a circulação é finita e proporcional à área limitada pela envoltória. Como a camada-limite se forma tanto na parte superior (circulação Γ_2) quanto na inferior (circulação $-\Gamma_1$) a diferença $\Gamma_2 - \Gamma_1$ é igual a Γ , circulação do vórtice inicial (Fig. 55.5).

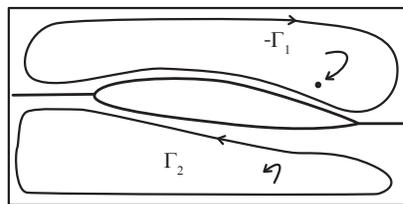


Figura 55.5

A circulação Γ em torno da asa permanecerá constante desde que não se alterem o ângulo de ataque e a velocidade de translação da asa. Qualquer alteração no ângulo de ataque ou na velocidade de translação provoca a produção de um novo vórtice que ajusta a força do vórtice inicial até o novo valor da circulação em torno da asa.

Teoria da asa de envergadura finita

No caso da asa infinita a distribuição da pressão ou da sustentação ao longo da envergadura é constante, tanto no topo quanto na parte de baixo da asa (Fig. 55.6a). Por outro lado, na asa de envergadura finita a diferença entre a pressão em cima e embaixo deve desaparecer gradativamente na direção da ponta, portanto, as distribuições não podem ser constantes (Fig. 55.6b). Como a pressão em cima é maior que a pressão embaixo da asa, haverá um escoamento de baixo para cima em torno das pontas da asa. Segue-se que na parte inferior da asa haverá uma corrente lateral do centro para as pontas enquanto na parte superior essa corrente dirige-se das pontas para o centro. Essas correntes compõem-se com a corrente correspondente ao avanço da asa, conforme mostra as setas em torno da asa finita da Figura 55.7.

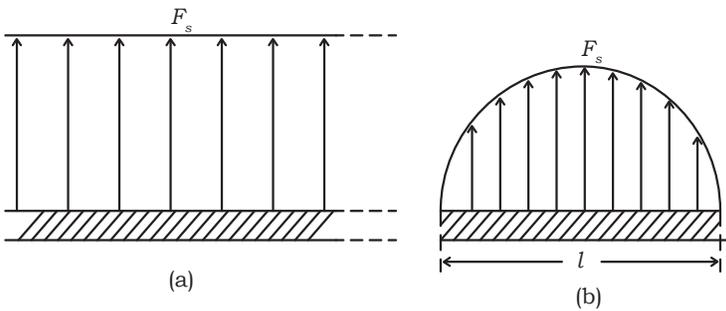


Figura 55.6

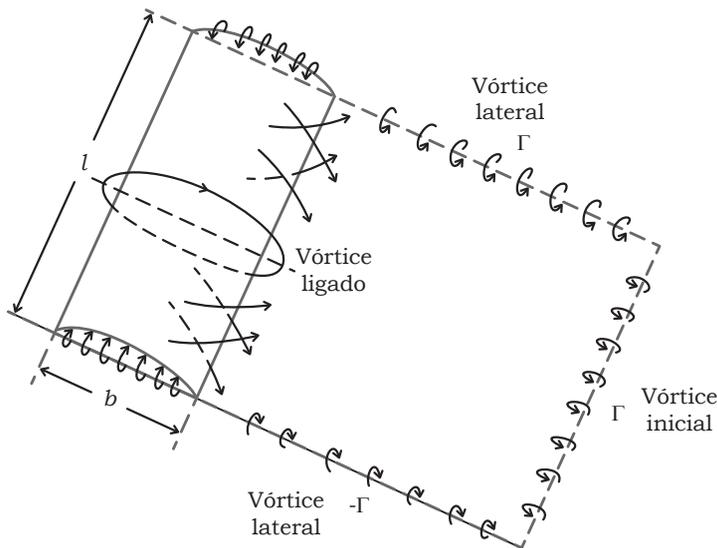


Figura 55.7

As correntes laterais formam uma superfície de descontinuidade no fluido que deixa a asa e acarretam a produção do *vórtice lateral* ou *vórtice de ponta*. Em torno da asa, por sua vez, existe um vórtice que é chamado de *vórtice ligado* porque está “preso” à asa que avança. A linha do vórtice inicial compõe com as linhas dos vórtices das pontas e a linha do vórtice ligado num circuito fechado em torno do qual a circulação é nula, em obediência ao teorema de Kelvin (Fig. 55.7). No escoamento real o vórtice inicial é rapidamente destruído pela ação das forças viscosas, entretanto, o vórtice da ponta pode ser evidenciado pela “esteira de vapor” que as pontas da asa deixam no céu, quando as condições de umidade e temperatura do ar são favoráveis. Esta esteira é produzida pela condensação do vapor da água do ar, devido à diminuição de temperatura que acompanha a diminuição de pressão no miolo do vórtice lateral. Depois de uma certa distância o vórtice da ponta também é consumido pela ação das forças viscosas. A linha do vórtice preso juntamente com as linhas dos vórtices das pontas remanescentes formam um circuito em forma de ferradura.

É evidente que a distribuição da circulação ao longo da envergadura de uma asa finita acompanha a distribuição da pressão e da sustentação conforme ilustrado na Figura 55.6b, i.e., nas pontas a circulação ligada deve ser nula e no centro da asa deve ser máxima.

Arrasto e sustentação induzidos

As circulações sobre os vórtices das pontas induzem um movimento dirigido para baixo ou *movimento descendente* no fluido que circula sobre uma asa de envergadura finita. A superposição das velocidades do movimento descendente e do movimento de avanço produz uma nova configuração no escoamento a jusante do bordo de fuga da asa. Na Figura 55.8 mostramos a adição vetorial da *velocidade descendente* v_d com a velocidade de avanço v_0 , resultando em uma velocidade desviada em relação à direção do voo chamada de velocidade induzida v_i . O ângulo entre a direção da velocidade de avanço v_0 e a direção da velocidade induzida v_i está representado por ε e é chamado de *ângulo descendente*.

Se a asa tivesse envergadura infinita não existiriam os vórtices das pontas, a única velocidade seria v_0 e a sustentação F_s seria expressa pela equação Kutta-Zhukovskii do escoamento bidimensional $F_s = -\rho v_0 \Gamma$. Em uma dada seção ao longo da envergadura de uma asa finita podemos considerar que o escoamento comporta-se como no caso bidimensional, desde que a análise seja feita não mais com a velocidade de avanço v_0 na direção do voo, cujo ângulo de ataque é α , mas sim com a velocidade induzida v_i , cujo ângulo de ataque induzido ou efetivo é expresso por

$$\alpha_i = \alpha - \varepsilon. \quad (55.1)$$

Portanto, na seção considerada da asa finita a sustentação normal à direção de v_i pode ser calculada pela equação Kutta-Zhukovskii

$$F_{s,i} = -\rho v_i \Gamma. \quad (55.2)$$

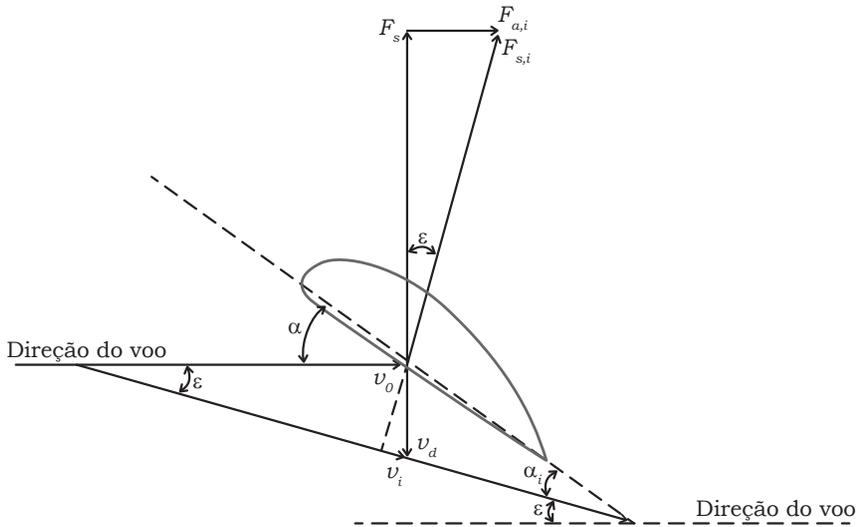


Figura 55.8

Um observador colocado na seção da asa onde a circulação da velocidade é Γ é capaz de sentir somente a velocidade v_i portanto, de fato, a sustentação por unidade de envergadura é expressa pela equação (55.2).

Na Figura 55.8 a sustentação $F_{s,i}$ foi desdobrada na sustentação F_s normal à direção da velocidade original e no *arrasto induzido* $F_{a,i}$, na direção de v_0 . Vemos que o efeito dos vórtices das pontas, por intermédio do movimento descendente, reduziu o ângulo de ataque e deslocou a sustentação para trás, de tal sorte que a nova sustentação $F_{s,i}$ tem um componente $F_{a,i}$ que se opõe ao avanço. Portanto, em última análise, os vórtices das pontas produzem um arrasto efetivo, mesmo no caso de escoamento ideal. Este arrasto soma-se ao arrasto de perfil (atrito + forma) no caso de escoamento real, viscoso. Fisicamente, o arrasto (força ou resistência) induzido é representado pela energia cinética (por unidade de comprimento) dos vórtices das pontas, que é “consumida”, i.e., transformada em calor pelas forças viscosas.

Na prática, o ângulo descendente ε é usualmente muito pequeno, portanto,

$$\frac{v_d}{v_0} = \frac{F_{a,i}}{F_s} = \operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon, \quad (55.3)$$

$$\frac{F_s}{F_{s,i}} = \frac{v_0}{v_i} = \cos \varepsilon = 1. \quad (55.4)$$

Segue-se que, de modo aproximado, temos

$$F_{s,i} = F_s, \quad (55.5)$$

$$v_i = v_0, \quad (55.6)$$

$$\alpha_i = \alpha - \varepsilon = \alpha - \frac{v_d}{v_0}. \quad (55.7)$$

Distribuição da velocidade descendente e da circulação

Tínhamos visto que a distribuição da circulação da velocidade ao longo da envergadura da asa deve evidentemente acompanhar a distribuição da sustentação (Fig. 55.6b), i.e., deve ser máxima no centro e nula nas pontas. Por outro lado, a velocidade descendente v_d também deve ter uma distribuição variável ao longo da envergadura, porque acompanha a variação da velocidade dos vórtices das pontas, velocidade esta que compõe com a velocidade de avanço a jusante do bordo de fuga da asa o valor de v . Sabemos que a velocidade dos vórtices livres das pontas é expressa pela equação (54.4) e $v \propto \Gamma/r$ onde r é a distância do centro do vórtice. Portanto, v_d é inversamente proporcional à distância dos centros dos vórtices (pontas da asa) em direção ao centro, ao longo da envergadura.

Na Figura 55.9, que representa uma seção transversal à direção do avanço, mostramos o campo de escoamento descendente. Os maiores semicírculos representam seções dos vórtices mais afastados das pontas.

Prandtl prova que quando a distribuição da sustentação (ou da circulação) ao longo da envergadura é elíptica, a velocidade descendente v_d é aproximadamente constante em toda as seções da asa; além disso, o arrasto induzido costal é mínimo. Verifica-se experimentalmente que quando o plano da asa tem o formato elíptico, a distribuição da sustentação é também aproximadamente elíptica. Na Figura 55.10 mostramos o plano de uma asa formada de duas semi-elipses e a distribuição correspondente de circulação que pode ser expressa por

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{\ell/2}\right)^2\right]}, \quad (55.8)$$

onde Γ_0 é a circulação máxima no centro e x é a distância ao longo da envergadura a partir do centro.

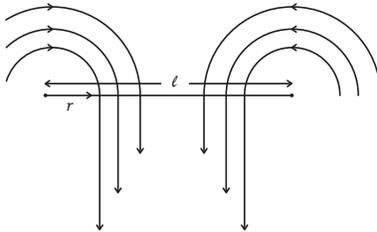


Figura 55.9

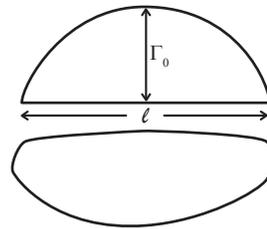


Figura 55.10

Cálculo da sustentação e do arrasto

Os coeficientes de sustentação e de arrasto do escoamento tridimensional podem ser calculados a partir de dados experimentais obtidos com asas de envergadura infinita, i.e., a partir do escoamento bidimensional. A força de sustentação que atua na asa pode ser expressa pela equação (51.4), onde substituímos a área projetada A_p pela área do plano da asa, S , i.e.,

$$F_s = C_s S = \frac{\partial v_0^2}{2}. \quad (55.9)$$

Por sua vez, o arrasto induzido pode ser expresso por

$$F_{a,i} = C_{a,i} S = \frac{v_d^2}{2}. \quad (55.10)$$

Portanto, dividindo membro a membro e tendo em vista a equação (55.3), temos

$$\frac{C_{a,i}}{C_s} = \frac{F_{a,i}}{F_s} = \frac{v_d}{v_0}. \quad (55.11)$$

No caso da asa elíptica, a velocidade descendente v_d é aproximadamente constante ao longo da envergadura e o seu valor é dado por

$$v_d = \frac{T_0}{2\ell}. \quad (55.12)$$

A sustentação total na asa é obtida por integração da equação Kutta-Zhukovskii, onde a circulação varia segundo a equação (55.9), i.e.,

$$F_s = \rho v_0 \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \Gamma dx = \rho v_0 \Gamma_0 \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \left[1 - \left(\frac{x}{\ell/2} \right)^2 \right]^{1/2} dx,$$

portanto

$$F_s = \rho v_0 \Gamma_0 \frac{\pi \ell}{4}. \quad (55.13)$$

Combinando as equações (55.11), (55.12) e (55.13) podemos chegar a seguinte expressão do coeficiente de arrasto induzido

$$C_{a,i} = C_s^2 \frac{S}{\pi \ell^2}. \quad (55.14)$$

A razão S/ℓ^2 é chamada de razão de aspecto da asa, i.e.,

$$RA = S/\ell^2. \quad (55.15)$$

No caso de uma asa retangular $S = \ell \times b$ e a razão de aspecto é expressa pela razão ℓ/b entre a envergadura e a corda.

Segue-se que o arrasto total da asa no escoamento tridimensional é expressa por onde $C_{a,T}$ é o coeficiente de arrasto total, C_a é o coeficiente de arrasto de perfil do escoamento bidimensional, arrasto este de superfície e do arrasto de forma e, $C_{a,i}$ é o coeficiente de arrasto induzido. Vemos que quando RA tende para o infinito o arrasto total tende para o arrasto de perfil. Nos aviões de grande raio de ação há vantagem em construir a asa de grande envergadura e pequena corda.

Diagramas polares

A comparação do mérito dos diversos perfis de asas é usualmente feito em um diagrama onde colocamos os valores experimentais de C_s e C_a e marcamos os ângulos de ataque correspondentes, tal como fizemos na Figura 52.4. Este tipo de diagrama é chamado de diagrama polar. Na Figura 55.11, para uma asa com $RA = 7$ locamos além da curva $C_s - C_a$ a parábola $C_s - C_{a,i}$, calculada pela equação (55.14). É evidente que o afastamento horizontal entre as duas curvas é igual ao valor do coeficiente de arrasto de perfil C_a .

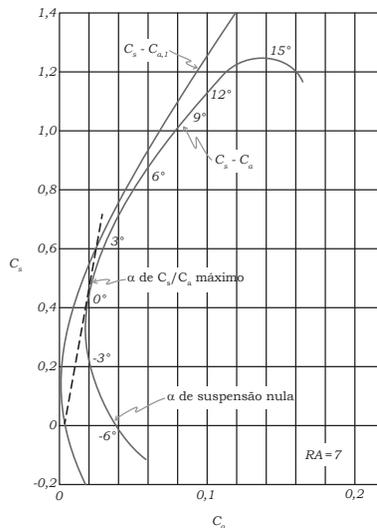


Figura 55.11

Referências

HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, Mcgraw-Hill Book Co., Capítulo 11, 1947.

BARNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworths Scientific Publications, Capítulo 9, 1957.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Applied Hydro and Aeromechanics*, Dover, Capítulo 6, 1957.

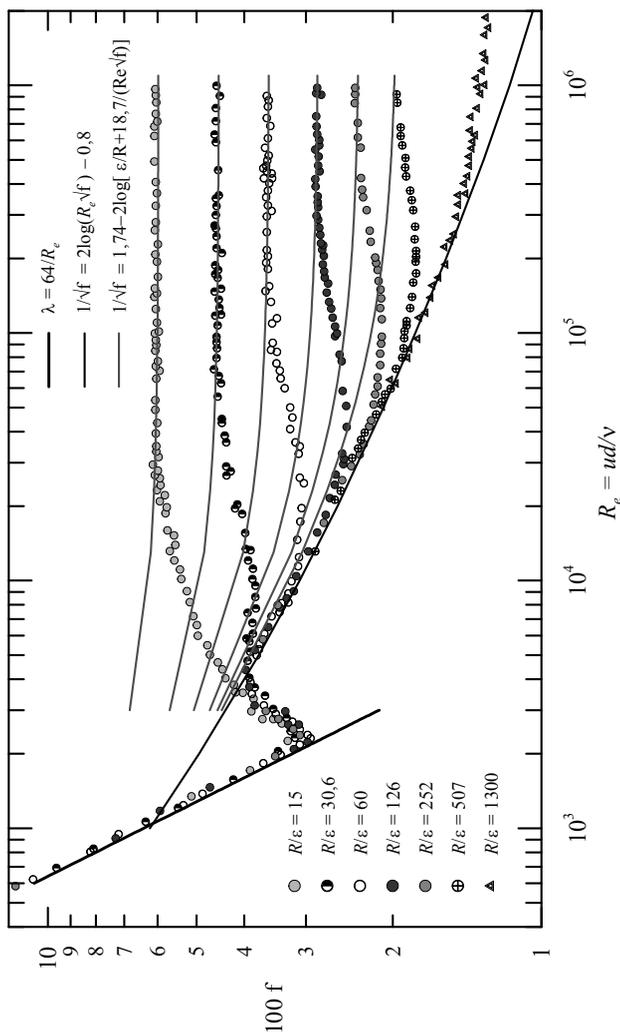


Figura A.1

1. Vapor-d'água		
Condições do vapor	Pressão (lbf/in ² man.)	Velocidade (m/s)
Saturado	0 a 25	20 a 30
Saturado	maior que 25	30 a 50
Superaquecido	200 e mais	35 a 100
2. Água		
Serviço	Velocidade (m/s)	
Alimentação de caldeiras	3 a 5	
Sucção de bombas e linhas de purga	2	
Serviços gerais, recalque de bombas	2 a 4	
Abastecimento	até 3	
3. Dutos e encanamentos		
Serviço	Velocidade (m/s)	
Dutos de tiragem forçada	10 a 20	
Dutos de tiragem induzida	10 a 15	
Chaminés	10	
Linhas de água	3	
Vapor de alta pressão	50	
Vapor de baixa pressão	60 a 80	
Vapor sob vácuo	120	
Ar comprimido	10	
Vapor refrigerante	—	
Alta pressão	5 a 15	
Baixa pressão	10 a 30	
Líquido refrigerante	1	
Salmoura	2	
Dutos de ventilação	5 a 15	
4. Hidrocarbonetos líquidos		
Serviço	Viscosidade	Velocidade (m/s)
Sucção de bomba	média	1 a 2
Sucção de bomba	alta	0,1 a 0,3
Recalque de bomba	média	3 a 5
Recalque de bomba	alta	2 a 3
Escoamento por gravidade	média	1 a 2
Escoamento por gravidade	alta	2 a 3
5. Vapores de hidrocarbonetos		
Serviço	Velocidade (m/s)	
Topo de torres para condensadores	até 20	
Vapor úmido	20 a 40	
Vapor seco	40 a 60	

Tabela A.2. Velocidades econômicas para a estimativa do diâmetro de tubulações.

Apêndice 3

Diam. exter. in	Schedule nº	Espes. parede in	Diam. interno in	Área interna	Comp. da circunf. (ft) ou da superfície (sq.ft/ft)		Capacidade (alft/sec) velocidade	
					externo	interno	U.S. gal/min	lb/hr água
0,405	40	0,068	0,2690	0,000400	0,106	0,0705	0,179	89,5
	80	0,095	0,215	0,00025	0,106	0,0563	0,111	56,0
0,540	40	0,088	0,364	0,00072	0,141	0,0954	0,323	161,5
	80	0,119	0,302	0,00050	0,141	0,0792	0,224	112,0
0,675	40	0,091	0,493	0,00133	0,177	0,1293	0,596	298,0
	80	0,126	0,423	0,00098	0,177	0,1110	0,440	220,0
0,840	40	0,109	0,622	0,00211	0,220	0,1630	0,945	472,5
	80	0,147	0,546	0,00163	0,220	0,1430	0,730	365,0
1,050	40	0,113	0,824	0,00371	0,275	0,2158	1,665	832,5
	80	0,154	0,742	0,00300	0,275	0,1942	1,345	672,5
1,315	40	0,133	1,049	0,00600	0,344	0,2745	2,690	1.345,0
	80	0,179	0,957	0,00499	0,344	0,2505	2,240	1.120,0
1,660	40	0,140	1,380	0,01040	0,435	0,362	4,57	2.285,0
	80	0,191	1,278	0,00891	0,435	0,335	3,99	1.995,0
1,900	40	0,145	1,610	0,01414	0,498	0,422	6,34	3.170,0
	80	0,200	1,500	0,01225	0,498	0,393	5,49	2.745,0
2,375	40	0,154	2,067	0,02330	0,622	0,542	10,45	5.225,0
	80	0,218	1,939	0,02050	0,622	0,508	9,20	4.600,0
2,375	40	0,203	2,469	0,03322	0,753	0,647	14,92	7.460,0
	80	0,276	2,323	0,02942	0,753	0,609	13,20	6.600,0
3,500	40	0,216	3,068	0,05130	0,917	0,804	23,00	11.500,0
	80	0,300	2,900	0,04587	0,917	0,760	20,55	10.275,0
4,000	40	0,266	3,548	0,06870	1,047	0,930	30,80	15.400,0
	80	0,318	3,364	0,06170	1,047	0,882	27,70	13.850,0
4,500	40	0,237	4,026	0,08840	1,178	1,055	39,6	19.800,0
	80	0,337	3,826	0,07986	1,178	1,002	35,8	17.900,0
5,563	40	0,258	5,047	0,1390	1,456	1,322	62,3	31.150,0
	80	0,375	4,813	0,1263	1,456	1,263	57,7	28.850,0
6,625	40	0,280	6,065	0,2006	1,734	1,590	90,0	45.000,0
	80	0,432	5,761	0,1810	1,734	1,510	81,1	40.550,0
8,625	30	0,277	8,071	0,3553	2,258	2,115	159,4	79.700,0
	40	0,322	7,981	0,3474	2,258	2,090	155,7	77.850,0
	80	0,500	7,625	0,3171	2,258	2,000	142,3	71.150,0
10,75	30	0,307	10,136	0,5603	2,814	2,655	252,0	126.000,0
	40	0,365	10,020	0,5475	2,814	2,620	246,0	123.000,0
	60	0,500	9,750	0,3185	2,814	2,550	233,0	116.500,0
12,75	30	0,330	12,090	0,7972	3,338	3,17	358,0	179.000,0

Tabela A.3. Dimensões e capacidades de tubos de aço (norma norte-americana – ASA.B-36.10-1939).

Apêndice 4

Espessura da parede		Diamet. interno		Área interna		Comprimento da circunf. (ft) ou da superfície (sq.ft/ft)		Velocid. fl/sq por 1US gal/min		Capacidade (alft/seg) velocidade US gal/min lb/hr água	
BWG	in	in	sq.ft	externo	interno	gal/min	US gal/min	lb/hr água			
16	0,065	0,495	0,00134	0,1636	0,1296	1,663	0,6014	300,7			
18	0,049	0,527	0,00151	0,1636	0,1380	1,476	0,6777	338,9			
14	0,063	0,584	0,00186	0,1963	0,1529	1,198	0,8348	417,4			
16	0,065	0,628	0,0210	0,1963	0,1623	1,061	0,9425	471,3			
18	0,049	0,652	0,00232	0,1963	0,1707	0,962	1,041	520,5			
12	0,109	0,782	0,00334	0,2618	0,2048	0,667	1,499	750,0			
14	0,083	0,834	0,00379	0,2618	0,2183	0,583	1,701	850,5			
16	0,065	0,870	0,00413	0,2618	0,2277	0,533	1,854	927,0			
10	0,84	0,982	0,00526	0,3271	0,2572	0,424	2,361	1181,0			
12	0,109	1,032	0,00581	0,3271	0,2701	0,364	2,603	1304,0			
14	0,083	1,084	0,00641	0,3271	0,2839	0,348	2,877	1439,0			
10	0,134	1,232	0,00828	0,3925	0,3925	0,269	3,716	1858,0			

Tabela A.4. Dimensões e capacidades de tubos (norma norte-americana).

	K
Válvula globo, totalmente aberta	10,00
Válvula de retenção articulada, aberta	2,00
Válvula, totalmente aberta	5,00
Válvula de gaveta, totalmente aberta	0,19
– 3/4 aberta	1,15
– 1/2 aberta	5,60
– 1/4 aberta	24,00
Curva de retorno, fechada	2,20
Tê padrão	1,80
Cotovelo padrão de 90°	0,90
Cotovelo de 45°	0,42

Tabela A.5. Coeficiente de resistência de válvula e conexões.

Apêndice 6

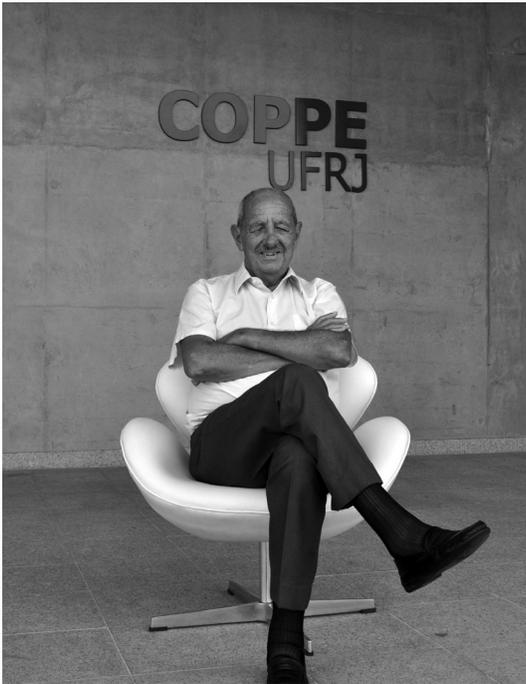
	L/D
Válvula globo	340
Válvula de gaveta	—
– completamente aberta	13
– 1/2 aberta	160
– 3/4 aberta	35
– 1/4 aberta	900
Válvula de retenção articulada, aberta	135
Válvula borboleta, aberta	20
Cotovelo padrão, 90°	30
Cotovelo padrão, 45°	16
Cotovelo 90°, raio longo	20
Tê, corrido	20
Tê, saída lateral	60
Curva de retorno, fechada	50

Tabela A.6 – Comprimentos equivalentes de válvula e conexões.

Referências

- [1] BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons (1960).
- [2] PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Fundamentals of Hydro and Aero-mechanics*, McGraw-Hill Book Co. (1934).
- [3] SCHEETER, V.I. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co. (1958).
- [4] MELLO FLORES, J.O. de. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Notas Mimeografadas, Escola Nacional de Engenharia, (1961).
- [5] HUNSAKER, J.C.; RIGHTMIRE, B.G. *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co. (1947).
- [6] LONGWELL, P.A. *Mechanics of Fluids Flow*, Notas Mimeografadas, California Institute of Technology (1958).
- [7] KAY, J.M. *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Cambridge University Press (1957).
- [8] FRANKIN, N.L.; CASS, F.H. Chemical Engineering Practice. In: CREMER, H.W.; DAVIES, T. (Eds.). *Butterworth Scientific Publications*, vol. 4 (1957).
- [9] VALLENTINE, H.R. *Applied Hydrodynamics*, Butterworth Scientific Publications (1959).
- [10] HOLLIDAY, D.; RESNICK, R. *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons (1960).
- [11] BERNA, P.S. *Fluid Mechanics for Engineers*, Butterworth Scientific Publications (1957).
- [12] LEWITT, E.H. *Hydraulics and Fluid Mechanics*, Sir Isaac Pitman & Sons (1958).
- [13] DAUGHERY, R.L.; INGERSOLL, A.C. *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co. (1954).
- [14] STREETER, V.L. *Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Book Co. (1948).
- [15] TRINDADE NEVES, E. *Curso de Hidráulica*, Editora Globo (1960).
- [16] SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co. (1960).
- [17] KENYON, R.A. *Principles of Fluid Mechanics*, The Ronald Press Co. (1960).

- [18] PAO, R.H.F. *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons (1961).
- [19] STEPANOFF, A.J. *Turboblowers*, John Wiley & Sons (1955).
- [20] GARCEZ, L.N. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Edgard Blucher (1960).
- [21] BENRRIL, H. *Hidromecânica*, Editora Dosset (1960).
- [22] ECKERT, E.R.G.; DRAKE, R.W. *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co. (1959).
- [23] LANDMAN, L.D.; LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1959).
- [24] ADDISON, H. *A Treatise on Applied Hydraulics*, John Wiley & Sons (1957).
- [25] KUNDSÉN, J.G.; KATZ, D.L. *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Co. (1958).
- [26] AZEVEDO NETO, J.W. *Manual de Hidráulica*, Edgard Blucher (1957).
- [27] *Flow of Fluids Through Valves, Fittings and Pipe*, Technical Paper no. 410, Crane Co. (1957).
- [28] PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. *Applied Hydro and Aeromechanics*, Dover (1957).
- [29] COULSON, J.M.; RICHARDSON, J.F. *Chemical Engineering*, vol. I, McGraw-Hill Book Co. (1954).
- [30] GROBER, H.; ERK, S.; GRIGULL, U. *Fundamentals of Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Co. (1961).
- [31] GOLDSTEIN, S. (Ed.). *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1957).
- [32] BENNETT, C.O.; MYERS, J.E. *Momentum, Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co. (1962).
- [33] DUNCAN, W.J.; THOM, A.S.; YOUNG, A.O. *An Elementary Treatise on the Mechanics of Fluids*, Edward Arnold (1960).



Alberto Luiz Galvão Coimbra nasceu no bairro de Botafogo, no Rio de Janeiro, em 1923. Integra o grupo de nacionalistas brasileiros que, com talento e espírito crítico, deram importante contribuição ao país.

Químico industrial formado pela Escola Nacional de Química, da então Universidade do Brasil, hoje UFRJ, Coimbra tomou gosto pela Matemática na universidade, o que o conduziu à graduação em Engenharia Química e, posteriormente, em 1947, ao mestrado na Universidade Vanderbilt, nos Estados Unidos. Dar continuidade aos estudos após completar a graduação era uma raridade no Brasil da época.

Coimbra retornou ao Rio de Janeiro, em 1953, como docente do Instituto de Química da Universidade do Brasil. Inspirado na estrutura universitária americana, na qual professores e alunos se dedicavam integralmente à academia, passou a defender com vigor novo modelo de ensino para a universidade brasileira. Numa época em que ser professor universitário no Brasil era só atividade extra, Coimbra sonhava com um sistema que combinasse ensino e pesquisa, com professores bem remunerados, trabalhando em regime de tempo integral e dedicação exclusiva.

Baseado nesses princípios, propôs a criação de um curso de pós-graduação em que fosse praticado o que chamava de “ciência da engenharia”. A iniciativa, considerada utópica por muitos, teve apoio de Athos da Silveira Ramos, diretor do Instituto de Química, que aceitou incluir o curso em seu organograma.

E foi assim que Coimbra instituiu um modelo de pós-graduação absolutamente inovador no Brasil. Em 1963, inaugurou o primeiro curso de mestrado em Engenharia Química do país, que começou a funcionar em duas pequenas salas do campus da Praia Vermelha e se expandiu para dar origem ao maior centro de ensino e pesquisa de engenharia da América Latina: a Coppe.

Alberto Luiz Coimbra sempre foi um professor interessado no aprimoramento de seus alunos, sem lançar mão de fórmulas prontas nem de manuais. Não se contentava em ver os estudantes repetindo apenas o que lhes era ensinado em aulas anotadas ou conhecimentos passados por livros didáticos. Ele acreditava que o Brasil só conquistaria autonomia quando a indústria pudesse contar com tecnologia nacional. E para isso era preciso investir na formação de engenheiros capazes de produzir ciência e tecnologia, e não apenas aplicar soluções e conhecimentos importados.

Coimbra permaneceu à frente da direção da Coppe até 1973, quando foi afastado no auge da ditadura militar. Em 1981, recebeu o Prêmio Anísio Teixeira, do Ministério da Educação. Dois anos depois, aos 60 anos, voltava à Coppe. Foi homenageado pelos colegas com o cargo de coordenador do Programa de Engenharia Química, o primeiro curso da Coppe, no qual permaneceu como pesquisador até se aposentar, em 1993.

Em 1995, a instituição que sonhou e construiu deu-lhe um dos maiores reconhecimentos que se pode receber em vida: passou a se chamar Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia. No entanto, manteve-se a sigla que ele havia escolhido há 30 anos: Coppe.